Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 13
G. Bärwolff, R. Nabben, R. Schneider 07.10.2013

Oktober – Klausur
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Insbesondere sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Jedes Blatt muss mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer beschriftet sein. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer eine **kurze Begründung** und/oder den **vollständigen Rechenweg** an. Ohne nachvollziehbaren Bezug Ihrer Antwort zur Aufgabe gibt es keine Punkte. „Nach dem Satz in der Vorlesung / im Tutorium / im Skript“ gilt nicht als Begründung. Der entsprechende Satz muss zitiert werden und es muss begründet werden, warum der Satz in der gegebenen Aufgabe angewendet werden kann.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit mindestens 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

Ohne Begründung und/oder vollständigen Rechenweg gibt es keinen Punkt.

1. Aufgabe
11 Punkte

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcr} 3x_1 & -6x_2 & -9x_3 & +33x_4 & = & 21 \\ & & 2x_3 & -6x_4 & = & -4 \\ x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +11x_4 & = & 7 \end{array}.$$

(a) Bestimmen Sie die zum gegebenen LGS zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix $[A|\vec{b}]$.

(b) Bestimmen sie die normierte Zeilenstufenform von $[A|\vec{b}]$.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Gleichungssystems.

(d) Bestimmen Sie die Lösung des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$.

(e) Bestimmen Sie eine Basis von Bild(A).

(f) Gibt es eine rechte Seite $\vec{v}$ so, dass $A\vec{x} = \vec{v}$ genau eine Lösung hat?

2. Aufgabe
12 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p_B(\lambda)$ von B mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B und den Eigenraum zum betragsmäßig größten Eigenwert.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie Matrizen S und D an, sodass $B = SDS^{-1}$.

(e) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t)$, $\vec{y}_0 = \vec{y}(1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Aufgabe
9 Punkte

Gegeben seien die folgenden Abbildungen:

$$F_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & a(x+b) \end{array} \qquad F_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_{\leq 1}[x] \\ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \mapsto & (2a+b)x - 2b \end{array} \qquad F_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{\leq 1}[x] & \to & \mathbb{R}^{2,2} \\ ax + b & \mapsto & \begin{bmatrix} -b & a+b \\ a-b & 2a \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) Überprüfen Sie, ob F_1 eine lineare Abbildung ist.

(b) Überprüfen Sie, ob F_2 eine lineare Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie, falls möglich, die Abbildungsvorschrift von $F_2 \circ F_3$ bzw. $F_3 \circ F_2$.

(d) Bestimmen Sie die inverse Abbildung von F_2.

4. Aufgabe
11 Punkte

Gegeben sei der Vektorraum $V := \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit der Basis $\mathcal{B} = \{x^2+1, 2x+2, x^2\}$. Die lineare Abbildung $L : V \to V$ sei gegeben durch die Bilder

$$L(x^2+1) = 12x + 12, \quad L(2x+2) = 3x^2 + 1, \quad L(x^2) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

(b) Welches Polynom $p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ besitzt den Koordinatenvektor $p_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$?

(c) Zeigen Sie, dass $p_{\mathcal{B}}$ ein Eigenvektor von $L_{\mathcal{B}}$ zum Eigenwert 3 ist.

(d) Berechnen Sie $L(p)$ für das Polynom aus Aufgabenteil b).

5. Aufgabe
8 Punkte

Gegeben seien die Mengen

$$T_1 = \left\{ C \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| C \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| a + 2b = 0 \text{ und } c + d = 0 \right\}.$$

(a) Prüfen Sie, ob T_1 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(b) Prüfen Sie, ob T_2 ein Teilraum des $\mathbb{R}^{2,2}$ ist.

(c) Ist $\mathcal{M} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von T_2?

6. Aufgabe
9 Punkte

Gegegen seien $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A bezüglich des Standardskalarprodukts in $\mathbb{R}^3$.

(b) Berechnen Sie $\vec{v}^T A\vec{w}$ und $\vec{w}^T A\vec{v}$.

(c) Ist die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_* : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_* = \vec{x}^T A\vec{y}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$?