Technische Universität Berlin SS 16
Fakultät II – Institut für Mathematik 27.07.2016
Doz.: R. Kruse, C. Merdon, R. Nabben
Ass.: Beßlich, Seib

Modulprüfung
„Analysis I und Lineare Algebra für Ingenieurwissenschaften“
Teil: „Lineare Algebra“

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe bitte ein neues Blatt verwenden. Auf jedes Blatt bitte Name und Matrikelnummer schreiben. Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und, wenn nichts anderes gesagt, immer eine kurze, aber vollständige Begründung an. Insbesondere soll immer klar werden, welche Sätze oder Theoreme verwendet wurden! Ohne Begründung bzw. Rechenweg gibt es keine Punkte!

Die Bearbeitungszeit für die Teilleistung im Fach „Lineare Algebra“ beträgt 60 Minuten.

Die Gesamtklausur ist mit 45 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile (Analysis I und Lineare Algebra) der Klausur mindestens 40% der Punkte erreicht werden.

☐ **Ich habe bereits nach alter Prüfungsordnung die Modulklausur „Analysis für Ingenieurwissenschaften“ bestanden/anerkannt bekommen.**

Korrektur Lineare Algebra

1	2	3	4	Σ

Punktzahl: **Analysis I** **Lineare Algebra** **Gesamtpunktzahl**

Σ

Σ

Σ

1. Aufgabe
8 Punkte

Gegeben seien die Matrix $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,5}$ und der Vektor $\vec{b} := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Bringen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix $[\,A \,|\, \vec{b}\,]$ in normierte Zeilenstufenform.

(b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) Gibt es einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, sodass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{v}$ keine Lösung besitzt?

(a) **(3 Punkte)**

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II}+2\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 3 & -6 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{III}-3\mathrm{I}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\mathrm{II}\leftrightarrow\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{I}-\mathrm{III}} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] = \mathrm{NZSF}([A|\vec{b}])$$

(b) **(3 Punkte)**
Ausgehend von der NZSF in a): Die Nichtkopfvariablen parametrisieren die Lösungsmenge. Setze: $x_2 := s,\ x_5 := t,\ \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die Kopfvariablen: $x_1 + 2s - 2t = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1 - 2s + 2t$, $x_3 + 3t = -1 \Leftrightarrow x_3 = -1 - 3t$ und $x_4 - t = 2 \Leftrightarrow x_4 = 2 + t$. Somit ist die Lösungsmenge des LGS:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-2s+2t \\ s \\ -1-3t \\ 2+t \\ t \end{bmatrix} \middle| \; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

(c) **(1 Punkt)**
Eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ wird durch die Spalten der Matrix A gebildet, bei denen in der NZSF ein Kopf steht. Nach a) sind dies die erste, dritte und vierte Spalte von A. Somit ist $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$.

(d) **(1 Punkt)**
Nach c) enthält eine Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ drei Vektoren. Somit ist $\dim(\mathrm{Bild}(A)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Also gibt es keinen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, der nicht im Bild von A liegt. Folglich ist das LGS $A\vec{x} = \vec{v}$ immer lösbar.

---

2. Aufgabe
9 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B := \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von B.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum kleinsten Eigenwert von B.

(c) Zeigen Sie, dass $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist.

(d) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit $B = SDS^{-1}$ an.

(e) Ist B invertierbar?

(f) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = B\vec{y}(t), \quad \vec{y}_0 = \vec{y}(3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) **(1 Punkt)**
B ist eine obere Dreiecksmatrix, also stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen: $\lambda_{1/2} = 4$ und $\lambda_3 = 7$.

(b) **(2 Punkte)** Für den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1/2}$ gilt:
$V_{\lambda_{1/2}} = \text{Kern}\left\{B - \lambda_{1/2} \cdot I_3\right\} = \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \overset{\text{II}-\text{I}}{=} \text{Kern}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$
$= \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

(c) **(1 Punkt)** $B\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \\ 0 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$.
Also ist $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor von B zum Eigenwert 7.

(d) **(3 Punkte)** B ist diagonalisierbar, falls die algVFH gleich der geomVFH für alle Eigenwerte ist. Nach a) bzw. b) ist $\lambda_{1/2}$ eine doppelte Nullstelle des char. Polynoms und die algVFH von $\lambda_{1/2}$ ist somit 2. Die geomVFH von $\lambda_{1/2}$ ist ebenfalls 2, da nach b) der zugehörige Eigenraum zweidimensional ist. Die algVFH von λ_3 ist nach a) gleich 1. Da die geomVFH eines Eigenwerts maximal so groß ist, wie die algVFH, aber mindestens 1, ist auch die geomVFH von λ_3 gleich 1. Also stimmt die algVFH mit der geomVFH für alle Eigenwerte überein und B ist folglich diagonalisierbar.
Eine Diagonalisierung von B ist: $B = SDS^{-1}$ mit $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

(e) **(1 Punkt)** B ist invertierbar, falls bijektiv. Alle Eigenwerte von B sind verschieden von 0. Der Kern von B besteht daher nur aus dem Nullvektor und B ist injektiv. Aus dem Dimensionssatz folgt, dass B auch surjektiv und damit bijektiv, also invertierbar, ist.

(f) **(1 Punkt)** Lösung mit der Eigenvektormethode: $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist Eigenvektor von B zum Eigenwert 7 . Daraus folgt: $y(t) = e^{\lambda_3(t-3)}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{7(t-3)} \\ 6e^{7(t-3)} \\ 0 \end{bmatrix}$.

---

3. Aufgabe

6 Punkte

Für den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $C := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ \alpha & -9\alpha & -4 & -3 \\ -1 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von C mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Spalten von C linear abhängig?

(c) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist C invertierbar?

(d) Berechnen Sie für $\alpha = -2$ die Determinante von $-2C^T$.

(a) **(2 Punkte)**

$$\det(C) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 1 & 1 \\ \alpha & -9\alpha & -4 & -3 \\ -1 & -8 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{(-1)(-1)\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \alpha & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der ersten Zeile}}$$

$$= \underbrace{1 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} \alpha & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right) + (-1)\cdot(-3)\cdot\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)}_{\text{Entwicklung nach der dritten Spalte}} = \alpha - 4 + 3(2+1) = \alpha + 5.$$

(b) **(1 Punkt)**
Die Spalten von C sind genau dann linear abhängig, wenn $det(C) = 0$, also genau dann, wenn $\alpha = -5$.

(c) **(1 Punkt)**
C ist genau dann invertierbar, wenn die Determinante von 0 verschieden ist, also für alle $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -5$.

(d) **(2 Punkte)**
Nach a) ist für $\alpha = -2$ $\det(C) = 3$. Somit ist $\det(-2C^T) = (-2)^4 \det(C^T) = (-2)^4 \det(C) = 16 \cdot 3 = 48$.

---

4. Aufgabe

7 Punkte

Sei $V := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2,2} \middle| A \text{ ist obere Dreiecksmatrix} \right\}$ mit der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie ausgehend von $\mathcal{B}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}_{\text{ONB}}$ von V bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_V = \frac{1}{18}ad + \frac{1}{4}be + \frac{1}{2}cf.$$

(b) Beschreibt die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\star : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix} \right\rangle_\star = 4ad + 2be$$

ebenfalls ein Skalarprodukt auf V?

(a) **(5 Punkte)** Wir bestimmen mit Gram-Schmidt eine Orthonormalbasis:

$$Q_1 = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}4^2}} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=0} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$Q_2 = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18}6^2 + \frac{1}{2}2^2}} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$Q_3 = \frac{\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}{\left\| \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{18}(-3)^2 + \frac{1}{2}1^2}} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Damit erhalten wir $\mathcal{B}_{ONB} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) **(1 Punkt)**
Es gilt: $\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle_\star = 0$. Also ist die Abbildung nicht positiv definit und somit kein Skalarprodukt.