Logik Abschlusstest 22/23

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 160 Testpunkte zu erreichen. 4 Testpunkte entsprechen einem Portfoliopunkt. Es können maximal 40 Portfoliopunkte erarbeitet werden.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.
Form der Abgabe: Lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert. Schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe unter die Aufgabe und auf die Rückseite des vorherigen Blattes. Falls Sie mehr Platz benötigen, werden wir Ihnen auf Anfrage weitere Blätter zur Verfügung stellen.

Aufgabe 1

Aufgabe 1 26+24=50 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass die folgende Regel korrekt ist. Sie dürfen dafür **keine** der Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

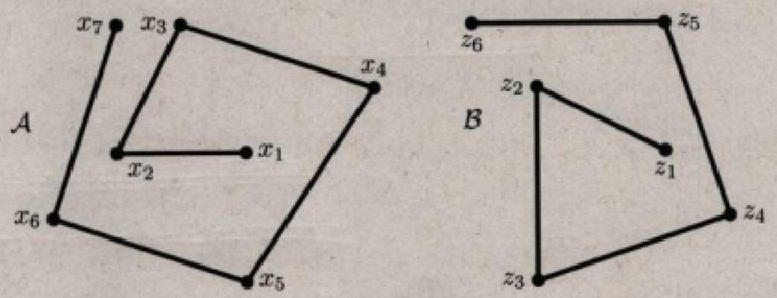
$$\frac{\overbrace{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta, \chi}^{1} \qquad \overbrace{\Phi, \chi \Rightarrow \Delta, \neg\varphi}^{2}}{\Phi, \psi \Rightarrow \psi \rightarrow \neg\varphi, \Delta}$$

(ii) Sei $\sigma = \{R, c\}$ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol R und dem Konstantensymbol c. Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

Aufgabe 2

Aufgabe 2 4+4+26+18=52 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Wir definieren die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über ihre Darstellung als ungerichtete Graphen.



(i) Geben Sie ohne Begründung das minimale $m \in \mathbb{N}$ an, sodass der Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt.

(ii) Geben Sie ohne Begründung das maximale $k \in \mathbb{N}$ an, sodass die Duplikatorin im Spiel $\mathfrak{G}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt.

(iii) Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an, wobei ℓ so klein wie möglich ist. Begründen Sie kurz, warum es sich um eine Gewinnstrategie handelt.

(iv) Geben Sie ohne Begründung eine unterscheidende Formel für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit kleinstmöglichem Quantorenrang an.

Aufgabe 3

Aufgabe 3 10 8+10+10+14+16=58 Punkte

Sei $\sigma = \{\cdot, \mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ eine Signatur, wobei $\cdot$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist und a, b zwei Konstantensymbole sind und sei $\Sigma = \{a, b\}$.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma^n = \{x_1x_2 \dots x_n \mid x_i \in \Sigma \text{ und } i \in [n]\}$ und sei $\Sigma^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \Sigma^n \cup \{\epsilon\}$, wobei ϵ das leere Wort ist.

Wir definieren die σ-Struktur $\mathcal{W} = (\Sigma^*, \cdot^{\mathcal{W}}, \mathsf{a}^{\mathcal{W}}, \mathsf{b}^{\mathcal{W}})$ mit $\mathsf{a}^{\mathcal{W}} = a$, $\mathsf{b}^{\mathcal{W}} = b$ und für alle $v, w \in \Sigma^*$ mit $v = v_1v_2 \dots v_n \in \Sigma^n$ und $w = w_1w_2 \dots w_m \in \Sigma^m$ für $n, m \geq 1$, definieren wir

$$v \cdot^{\mathcal{W}} w = v_1 \dots v_n w_1 \dots w_m \text{ und } \epsilon \cdot^{\mathcal{W}} v = v \cdot^{\mathcal{W}} \epsilon = v \text{ für alle } v \in \Sigma^*.$$

Sei $w \in \Sigma^*$ ein Wort. Dann ist $v \in \Sigma^*$ ein *Teilwort von w* wenn es Wörter $w_{prefix}, w_{suffix} \in \Sigma^*$ mit $w = (w_{prefix} \cdot^{\mathcal{W}} v) \cdot^{\mathcal{W}} w_{suffix}$ gibt. Insbesondere ist w ein Teilwort von sich selbst.

Geben Sie fünf Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5 \in \mathrm{FO}[\sigma]$ an, sodass:

(i) $\varphi_1(\mathcal{W}) = \{\epsilon\}$,

(ii) $\varphi_2(\mathcal{W}) = \{w = x_1 \dots x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ und } x_n = a\}$,

(iii) $\varphi_3(\mathcal{W}) = \{w \mid ab \text{ ist kein Teilwort von } w\}$,

(iv) $\varphi_4(\mathcal{W}) = \{(v, w) \mid v \text{ ist ein Teilwort von } w\}$, und

(v) $\varphi_5(\mathcal{W}) = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, wobei $a^n := aa \dots a \in \Sigma^n$ und $b^m := bb \dots b \in \Sigma^m$.

Sie müssen Ihre Antworten in dieser Aufgabe nicht begründen.