Matrikelnummer:

Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WiSe 23/24

Schriftlicher Test Logik

Aufgabe:	1	2	3
Punkte:	43	46	39

Summe: 128

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 160 Testpunkte zu erreichen. 4 Testpunkte entsprechen einem Portfoliopunkt. Es können maximal 40 Portfoliopunkte erarbeitet werden.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.
Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.
Form der Abgabe: Lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert. Schreiben Sie die Lösung zu jeder Aufgabe unter die Aufgabe und auf die Rückseite des vorherigen Blattes. Falls Sie mehr Platz benötigen, werden wir Ihnen auf Anfrage weitere Blätter zur Verfügung stellen.

Aufgabe 1 26+24=50 Punkte

(i) Zeigen Sie, dass die folgende Regel korrekt ist. Sie dürfen dafür **keine** der Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\varphi \vee \psi \quad \Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi \vee \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \leftrightarrow \psi}$$

Angenommen, die oberen Sequenzen sind gültig. ✓
Sei β eine Belegung die zu $\Phi \cup \Delta \cup \{\varphi, \psi\}$ passt mit $\beta \models \Phi$. ✓

Fall 1: Es ex. ein $\delta \in \Delta$ mit $\beta \models \delta$. In dem Fall muss nichts weiter gezeigt werden. ✓

Fall 2: Es ex. kein $\delta \in \Delta$ mit $\beta \models \delta$. Da die oberen Sequenzen nach Vor. gültig sind, gilt $\beta \models \neg\varphi \vee \psi$ und $\beta \models \neg\psi \vee \varphi$. ✓

Fall 2.1: $\beta \models \varphi$. Dann muss $\beta \models \psi$ gelten, da sonst $\beta \models \neg\varphi \vee \psi$ nicht gilt. Damit ist auch $\varphi \leftrightarrow \psi$ ~~und damit~~ erfüllt und die untere Sequenz gültig. ✓

Fall 2.2: $\beta \models \neg\varphi$. Dann muss $\beta \models \neg\psi$ gelten, da sonst $\beta \models \neg\psi \vee \varphi$ nicht gelten würde. Damit ist ~~$\varphi = \psi$~~ $\varphi \leftrightarrow \psi$ erfüllt und die untere Sequenz gültig. ✓

(Siehe nächste Seite für Unteraufgabe *(ii)*.)

26/26

Regeln des Sequenzenkalküls

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi,\psi,\varphi\Rightarrow\Delta}{\Phi,\psi\wedge\varphi\Rightarrow\Delta}$ $\qquad(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\psi\quad\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi}{\Phi\Rightarrow\Delta,\psi\wedge\varphi}$ $\qquad(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\psi}{\Phi,\neg\psi\Rightarrow\Delta}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi,\varphi\Rightarrow\Delta\quad\Phi,\psi\Rightarrow\Delta}{\Phi,\varphi\vee\psi\Rightarrow\Delta}$ $\qquad(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi,\psi}{\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\vee\psi}$ $\qquad(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi,\psi\Rightarrow\Delta}{\Phi\Rightarrow\Delta,\neg\psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\quad\Phi,\psi\Rightarrow\Delta}{\Phi,\varphi\rightarrow\psi\Rightarrow\Delta}$ $\qquad(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi,\varphi\Rightarrow\Delta,\psi}{\Phi\Rightarrow\Delta,\varphi\rightarrow\psi}$

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi,\psi(t)\Rightarrow\Delta}{\Phi,\forall x\psi(x)\Rightarrow\Delta}$ $\qquad(\Rightarrow\forall)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\psi(c)}{\Phi\Rightarrow\Delta,\forall x\psi(x)}\ (*)$ $\qquad(S\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi,\psi(t)\Rightarrow\Delta}{\Phi,t\doteq t',\psi(t')\Rightarrow\Delta}$

$(\exists\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi,\psi(c)\Rightarrow\Delta}{\Phi,\exists x\psi(x)\Rightarrow\Delta}\ (*)$ $\qquad(\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\psi(t)}{\Phi\Rightarrow\Delta,\exists x\psi(x)}$ $\qquad(\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi\Rightarrow\Delta,\psi(t)}{\Phi,t\doteq t'\Rightarrow\Delta,\psi(t')}$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ,Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln stehen t und t' für einen beliebigen Term und $t\doteq t'$ bedeutet, dass wir $t=t'$ oder $t'=t$ verwenden können.

(a) Sei $\sigma=\{R,P\}$ eine Signatur mit zwei einstelligen Relationssymbolen R und P. Zeigen Sie, unter **ausschließlicher** Verwendung der Regeln des Sequenzenkalküls, dass die folgende Sequenz gültig ist.

−1P

$R(d)\Rightarrow R(d),P(c) \qquad R(d),P(c)\Rightarrow P(c)$

$(\rightarrow\Rightarrow)$ $R(d)\rightarrow P(c),\ R(d)\Rightarrow P(c)$ ~~mit $t'=y$, $t=c$, $\psi(t')=R(d)\rightarrow P(t')$~~

−6P falsche Regel

$(\cancel{S}\Rightarrow)$ $\forall y(R(d)\rightarrow P(y)),\ R(d)\Rightarrow P(c)$ ~~mit $t'=x$, $t=d$, $\psi(t')=\forall y(R(t')\rightarrow P(y))$~~

$(\cancel{S}\Rightarrow)$ $\forall x\forall y(R(x)\rightarrow P(\cancel{x})),\ R(d)\Rightarrow P(c)$ ~~mit d Konst. symb.~~

✓ $(\exists\Rightarrow)$ $\forall x\forall y(R(x)\rightarrow P(y)),\ \exists R(x)\Rightarrow P(c)$

✓ $(\Rightarrow\neg)$ $\forall x\forall y(R(x)\rightarrow P(y))\Rightarrow P(c),\ \neg\exists R(x)$

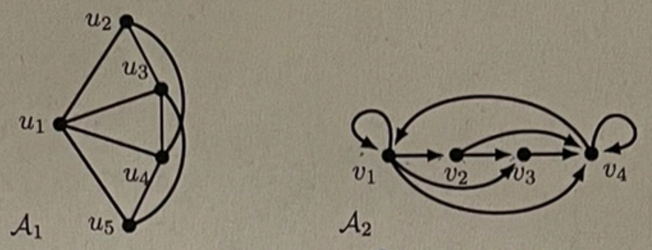
✓ $(\Rightarrow\forall)$ $\forall x\forall y(R(x)\rightarrow P(y))\ \Rightarrow\ \forall xP(x),\neg\exists xR(x)$ mit c ist Konst. symb.

17/24

Aufgabe 2 46 24+14+20=58 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligem Relationssymbol E.

(i) Betrachten Sie folgende drei σ-Strukturen $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$.



und $\mathcal{A}_3 := (\mathbb{Z}, E^{\mathbb{Z}})$ mit $E^{\mathbb{Z}} := \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y \text{ oder } y = |x|\}$.

Weiter definieren wir folgende Formeln φ_1 und φ_2:

- $\varphi_1(x) := \forall y(E(x,y) \lor E(y,x))$, und
- $\varphi_2(x) := \forall y \forall z(x = z \lor (E(x,y) \land E(y,z) \to E(x,z)))$. transitiv

Geben Sie ohne Begründung für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2,3\}$ die Menge $\varphi_i(\mathcal{A}_j)$ an.

$\varphi_1(\mathcal{A}_1) = \{\}$ ✓

$\varphi_1(\mathcal{A}_2) = \{v_1, v_4\}$ ✓ 22

$\varphi_1(\mathcal{A}_3) = \{x \in \mathbb{Z}, x \geq 0\}$ ✓

$\varphi_2(\mathcal{A}_1) = \{u_1, u_3, u_4\}$ ✓

$\varphi_2(\mathcal{A}_2) = \{v_1\}$ ✓

$\varphi_2(\mathcal{A}_3) = \{\mathbb{Z}\}$ ✓ -2

(Siehe nächste Seite für die Unteraufgaben *(ii)* und *(iii)*.)

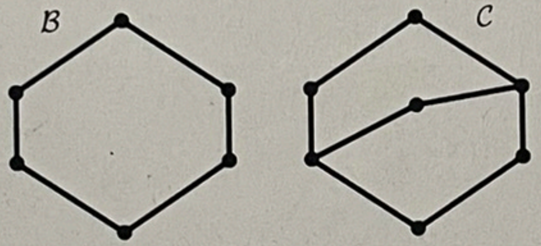
(ii) Geben Sie ohne Begründung eine σ-Struktur mit einem Universum mit maximal 6 Elementen an, welche die Formel φ erfüllt.

$$\varphi := \forall x \forall y (x \neq y \to (E(x,y) \leftrightarrow \neg E(y,x))) \land \underbrace{\exists x \exists y \exists z (x \neq y \land y \neq z \land x \neq z)}_{\text{3 untersch. elem.}}$$

Anmerkung: Eine graphische Darstellung der Struktur wie in *(i)* und *(iii)* ist ausreichend.

✓ 14/14

(iii) Betrachten Sie folgende Strukturen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$:



Geben Sie ohne Begründung einen Satz $\psi \in FO[\sigma]$ mit Quantorenrang 3 an, sodass $\mathcal{B} \not\models \psi$ und $\mathcal{C} \models \psi$.

Anmerkung: Sie können die Hälfte der Punkte mit einem Satz mit Quantorenrang 4 erreichen.

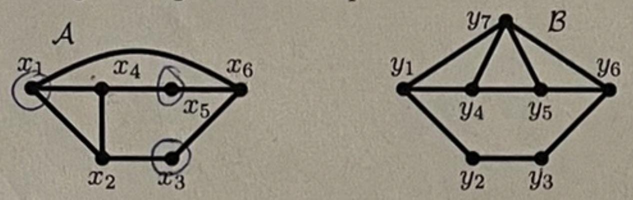
$$\psi = \neg \forall x (\exists y \exists z (E(x,y) \land E(x,z) \land y \neq z \land \forall a (a = y \lor a = z \lor \neg E(x,a))))$$

✓ 19/20

$\exists x \exists$

Aufgabe 3 4+4+18+26=52 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit dem zweistelligen Relationssymbol E. Wir definieren die σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über ihre Darstellung als ungerichtete Graphen.



(i) Geben Sie ohne Begründung das minimale $m \in \mathbb{N}$ an, sodass der Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt. $m = 4$ f -2 2/4

(ii) Geben Sie ohne Begründung das maximale $k \in \mathbb{N}$ an, sodass die Duplikatorin im Spiel $\mathfrak{G}_k(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ eine Gewinnstrategie besitzt. $k = 3$ $k = m-1$ aber nicht opt. -1 3/4

(iii) Geben Sie ohne Begründung eine unterscheidende Formel für $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ mit kleinstmöglichem Quantorenrang an.

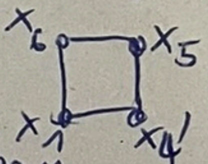
$$\exists a \exists b \exists c \exists d \, (E(a,b) \wedge E(b,c) \wedge E(c,d) \wedge E(d,a) \wedge \neg E(a,c) \wedge \neg E(b,d))$$

nicht opt ✓ 16/18

aber qr = m - 2

(iv) Geben Sie eine Gewinnstrategie für den Herausforderer im Spiel $\mathfrak{G}_\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an, wobei ℓ so klein wie möglich ist. Sie müssen die Minimalität von ℓ nicht begründen. Begründen Sie kurz, warum es sich um eine Gewinnstrategie handelt.

Der Herausforderer wählt in den Runden 1 bis 4 nach einander die Knoten x_1, x_4, x_5, x_6 aus $\mathcal{A}$ während die Duplikatorin in den Runden 1 bis 3 beliebige Knoten aus $\mathcal{B}$ wählt. Nach dem 4. Zug ist der Teilgraph aus $\mathcal{A}$ C_4, also



aber in $\mathcal{B}$ gibt es keinen dazu isomorphen Teilgraph und die Duplikatorin kann keinen passenden Knoten wählen. Der Herausforderer gewinnt also, folglich ist das eine Gewinnstrategie. ✓.

aber nicht min. -8

18/26