Matrikelnummer:

Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2024

Alt/Probe Klausur: Logische Methoden in der Informatik

Aufgabe:	1	2	3	4
Punkte:				

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Prüfung 200 Punkte zu erreichen.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn, dies wird **explizit** nicht verlangt.

Aufgabe 1 18 + 8 + 34 = 60 Punkte

(i) Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Betrachten Sie nun folgende Formel:

$$\begin{aligned}\varphi :=& \exists X_0 \exists X_1 \exists X_2 \big(\forall y (y \neq \max \to (y \in X_0 \cup X_1 \cup X_2 \wedge \min \in X_0)) \wedge P_c(\max) \wedge \\ &\forall z \in X_0 (z + 1 \in X_1 \wedge z + 2 \in X_2) \wedge \forall z \in X_1 (z - 1 \in X_0 \wedge z + 1 \in X_2) \wedge \\ &\forall z \in X_2 (z - 2 \in X_0 \wedge z - 1 \in X_1) \wedge X_0 \subseteq P_a \wedge X_1 \subseteq P_b \wedge X_2 \subseteq P_c\big)\end{aligned}$$

Geben Sie die Sprache $\mathcal{L}(\varphi)$ explizit an (zum Beispiel als regulären Ausdruck).

(ii) Geben Sie die Definition des Begriffs *Rangalphabet* an.

(iii) Sei $\Gamma_0 := \{a, b, c\}$ mit $\operatorname{rg}(x) = \{0, 2\}$ für alle $x \in \{a, b, c\}$.

Sei $\mathcal{T}_0$ die Sprache aller Γ_0-Bäume $T \in \mathcal{T}_{\Gamma_0}$ mit der Eigenschaft, dass für alle Knoten $t \in V(T)$ gilt: ist t mit c beschriftet so enthält der Unterbaum von T mit Wurzel t einen mit a beschrifteten Knoten.

Geben Sie einen nicht-deterministischen Baumautomaten an, der die Sprache $\mathcal{T}_0$ akzeptiert. Sie können einen bottom-up oder auch einen top-down Automaten angeben.

Aufgabe 2 $16 + 8 + 16 = 40$ Punkte

Vorbemerkung. In der Vorlesung wurden MSO-definierbare Baumsprachen behandelt, ohne die Begriffe einer *Baumstruktur* und der zugehörigen Signatur formal zu definieren. Da die formale Definition in den weiteren Aufgaben gebraucht wird, präzisieren wir hier die in der Vorlesung genutzten Begriffe.

Sei $\Gamma := \{a, b, c\}$ und $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(c) = \{0, 2\}$. Wir definieren $\sigma_\Gamma := \{P_a, P_b, P_c, S_1, S_2, \preceq\}$, wobei P_a, P_b, P_c jeweils 1-stellige Relationen und $S_1, S_2, \preceq$ jeweils 2-stellige Relationen sind.

Zu jedem Γ-Baum $T \in \mathcal{T}_\Gamma$ definieren wir die zugehörige Baumstruktur

$$\mathfrak{B}_T := (V(T), P_a^{\mathfrak{B}_T}, P_b^{\mathfrak{B}_T}, P_c^{\mathfrak{B}_T}, S_1^{\mathfrak{B}_T}, S_2^{\mathfrak{B}_T}, \preceq^{\mathfrak{B}_T})$$

wobei für $v, w \in V(T)$ gilt:

- $v \in P_x^{\mathfrak{B}_T}$ falls v mit x beschriftet ist für $x \in \{a, b, c\}$,
- $(v, w) \in S_1^{\mathfrak{B}_T}$ falls w das linke Kind von v ist und $(v, w) \in S_2^{\mathfrak{B}_T}$ falls w das rechte Kind von v ist, und
- $(v, w) \in \preceq^{\mathfrak{B}_T}$ falls es einen Wurzel-zu-Blatt Pfad gibt auf dem zuerst v und dann w besucht werden.

Für $\varphi \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Gamma]$ definieren wir $\mathit{Lang}(\varphi) := \{T \in \mathcal{T}_\Gamma \mid \mathfrak{B}_T \models \varphi\}$.

(i) Sei $\Gamma := \{a, b, c\}$ mit $\mathrm{rg}(x) = \{0, 2\}$ für alle $x \in \{a, b, c\}$.

Sei $\mathcal{T}_1$ die Klasse aller Γ-Bäume mit folgender Eigenschaft: wenn ein Knoten $t \in V(T)$ mit c beschriftet ist, dann gibt es in dem Unterbaum von T mit Wurzel t einen Knoten, der mit a beschriftet ist und zwei mit b beschriftete Kinder hat.

Geben Sie eine MSO-Formel $\varphi \in \sigma_\Gamma$ an, so dass $\mathit{Lang}(\varphi) = \mathcal{T}_1$.

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(ii) Geben Sie den Satz von Courcelle an.

(iii) Betrachten Sie die Baumsprache $\mathcal{T}_1$ aus (i). Die Sprache definiert auf naheliegende Art das folgende Entscheidungsproblem

Wort($\mathcal{T}_1$): Die Eingabe ist ein Γ-Baum $T \in \mathcal{T}_\Gamma$. Zu entscheiden ist, ob $T \in \mathcal{T}_1$.

Zeigen Sie, dass *Wort*($\mathcal{T}_1$) in Polynomialzeit entschieden werden kann.

Aufgabe 3 $8 + 8 + 26 = 42$ Punkte

(i) Sei Σ ein endliches Alphabet und $\mathcal{P} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ ein parametrisiertes Problem.

Geben Sie die Definition dafür dass $\mathcal{P}$ *fixed-parameter tractable* ist an.

(ii) Geben Sie den Satz von Seese an.

(iii) Für $d \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{D}_d$ die Klasse aller endlichen Graphen mit Maximalgrad $\leq d$.

Zeigen Sie: Für alle $d \in \mathbb{N}$ ist das Problem d-Dreieck fixed-parameter tractable, wobei d-Dreieck wie folgt definiert ist.

Eingabe: $G \in \mathcal{D}_d$, $k \in \mathbb{N}$

Parameter: k

Problem: Entscheide, ob es k Dreiecke $D_1, ..., D_k$ in G gibt, die paarweise disjunkt sind und so dass es keine Kanten zwischen Knoten verschiedener Dreiecke gibt.

Aufgabe 4 $26 + 16 + 16 = 58$ Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$. Für $n \geq 3$ sei C_n der Kreis der Länge n. Das heißt $V(C_n) := \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $E(C_n) := \{\{v_i, v_{(i \mod n)+1}\} \mid 1 \leq i \leq n\}$.

(i) Zeigen Sie: Für jeden basis-lokalen Satz $\varphi := \exists x_1 \ldots \exists x_k \big(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} \operatorname{dist}(x_i, x_j) > 2r \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \psi(x_i)\big)$, wobei $r \in \mathbb{N}$ und ψ eine r-lokale Formel ist, gibt es ein $i \geq 3$ so dass gilt

$$C_i \models \varphi \text{ genau dann, wenn } C_j \models \varphi \text{ für alle } j \geq i.$$

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(ii) Zeigen Sie: Für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ existiert ein $i \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $C_i \models \varphi$ genau dann, wenn $C_j \models \varphi$ für alle $j \geq i$.

(iii) Geben Sie einen Satz $\psi \in \mathrm{ESO}[\sigma]$ an, für den die Eigenschaft aus (i) nicht gilt.