Matrikelnummer:

Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2025

Probeklausur: Logische Methoden in der Informatik

Aufgabe:	1	2	3	4
Punkte:				

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Prüfung 200 Punkte zu erreichen.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn, dies wird **explizit** ausgeschlossen.

Aufgabe 1 14 + 14 + 14 =42 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit zweistelligem Relationssymbol E. Formalisieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe von FO[σ], MSO[σ] oder ESO[σ] Formeln (geben Sie für jede Aussage nur eine Formel ohne Begründung an). Geben Sie auch ohne Begründung an zu welcher Logik ihre Formel gehört.

(i) Sei $k \geq 1$ fest. Ein Graph G (aufgefasst als σ-Struktur) erfüllt die Formel genau dann, wenn es zwei Knoten in G gibt, so dass jeder Pfad der Länge höchstens k mindestens einen der beiden Knoten enthält.
(**Erinnerung:** *Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der Kanten im Pfad*) .

(ii) Ein Kreis C_n auf n Knoten (aufgefasst als σ-Struktur) erfüllt die Formel genau dann, wenn n gerade ist.

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(iii) Ein Graph G (aufgefasst als σ-Struktur) erfüllt die Formel genau dann, wenn G ein perfektes Matching hat. (**Erinnerung:** *Ein perfektes Matching $M \subseteq E(G)$ ist eine Menge von Kanten, so dass jeder Knoten in genau einer Kante aus M vorkommt*).

Aufgabe 2 46 Punkte

Sei $\Gamma := \{a, b\}$ mit $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \{0, 2\}$ ein Rangalphabet. Geben Sie ohne Begründung einen $\mathrm{NBA}_{\downarrow}$ an, der die Sprache aller Γ-Bäume T akzeptiert, die **eine gerade Anzahl** an mit a **beschrifteten Blätter** enthalten. (Ein $\mathrm{NBA}_{\uparrow}$ gibt immer noch Teilpunkte).

Aufgabe 3 4 + 4 + 14 + 10 + 20 +12= 64 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ und $d \geq 1$ fest. Sei $\mathcal{D}_d$ die Klasse aller Graphen mit Maximalgrad d.
(**Erinnerung:** Der Satz von Seese sagt, dass $MC(\mathrm{FO}[\sigma], \mathcal{D}_d)$ fixed-parameter tractable ist).

Folgend einige Fragen zum Beweis des Satzes von Seese. Sei $r \geq 1$ fest, $G \in \mathcal{D}_d$ und $n \coloneqq |V(G)|$.

(i) Geben Sie die Definition von r-Lokalität für Formeln an.

(ii) Geben Sie die Definition von Gaifman Normalform an.

(iii) Zeigen Sie, dass für jedes $v \in V(G)$ gilt $|N_r(v)| \leq d^{r+1}$.

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(iv) Sei $\psi(x) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine r-lokale Formel. Sei $v \in V(G)$ beliebig. Begründen Sie, warum $G \models \psi[x/v]$ in Zeit $f(d, r)$ entschieden werden kann für eine entsprechende Funktion f.

(v) Sei nun $U \subseteq V(G)$ eine Menge ausgewählter Knoten. Zeigen Sie, dass das Problem:

„Gegeben $G \in \mathcal{D}_d, U \subseteq V(G)$ und $k \geq 1$, gibt es k Knoten in U mit paarweisem Abstand $> 2r$?“ in Zeit $g(k, r) \cdot \mathsf{poly}(n)$ lösbar ist.
(**Hinweis:** Wir haben hierfür zuerst einen ‘Greedy’ Ansatz verwendet. Sollte der Platz nicht ausreichen, schreiben Sie gerne auf der Rückseite weiter).

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(vi) **Erinnerung**: *Ein basis-lokaler Satz hat die Form*

$$\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_k (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq k} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2r \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq k} \psi(x_i))$$

für $k, r \geq 1$ mit r-lokaler Formel ψ.
Sei nun $\mathrm{BL}[\sigma]$ die Menge aller **basis-lokalen Sätze**. Zeigen Sie mit Hilfe von (iv) und (v), dass $MC(\mathrm{BL}[\sigma], \mathcal{D}_d)$ fixed-parameter-tractable mit Parameter $(|\varphi| + d)$ ist.

Aufgabe 4 10 + 14 + 24 = 48 Punkte

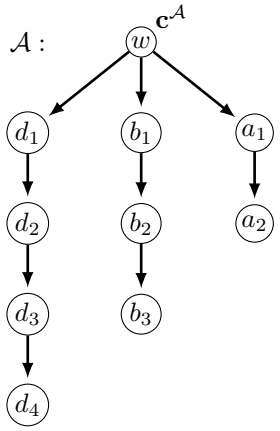
Sei $\sigma = \{E, \mathbf{c}\}$ wobei E ein zweistelliges Relationssymbol und $\mathbf{c}$ ein Konstantensymbol ist. Sei R ein einstelliges Relationssymbol.

Sei

$$\psi(R, x) \coloneqq \neg\exists y(E(x, y)) \ \vee \ \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \big(E(x, x_1) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge R(x_3)\big).$$

Beachten Sie, dass E auch gerichtete Graphen modellieren kann, d.h., die Relation muss *nicht* symmetrisch sein.

(i) Sei $R^0 \coloneqq \emptyset$. Bestimmen Sie die Induktionsstufen R^i für alle $i \geq 0$, der inflationären Fixpunktinduktion der Formel ψ in der Struktur $\mathcal{A}$, die in der folgenden Abbildung definiert wird.



(ii) **Definition:** *Ein gerichteter Stern ist die Vereinigung gerichteter Pfade $P_0, \ldots, P_k$, die alle den selben Startknoten w—die Wurzel—haben und ansonsten keinen gemeinsamen Knoten haben. Wir kodieren gerichtete Sterne als σ-Struktur wobei E die Kantenrelation angibt und die Konstante $\mathbf{c}$ immer durch die Wurzel w interpretiert wird;* ***Siehe die oben gezeichnete Struktur $\mathcal{A}$ für ein Beispiel eines gerichteten Sternes.***

Sei $\varphi \coloneqq [\mathrm{ifp}_{R,x}\, \psi](\mathbf{c})$ und sei weiter Θ die Menge aller gerichteter Sterne, wobei die Wurzel des Sternes mit der Konstante $\mathbf{c}$ markiert wurde.

Geben Sie ohne Beweis an, für welche $G \in \Theta$ gilt $G \models \varphi$.
(**Erinnerung:** *Die Länge eines gerichteten Pfades ist die Anzahl der Kanten im Pfad*).

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(iii) In einem gerichteten Stern nennen wir die Knoten vom Ausgangsgrad 0 Blätter. Geben Sie eine inflationäre Fixpunktformel an, die genau dann von $G \in \Theta$ erfüllt wird, wenn alle gerichteten Pfade von $\mathbf{c}^G$ zu einem Blatt genau gleich lang sind.