Matrikelnummer:

Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2024

Alt/Probeklausur: Logische Methoden in der Informatik

Aufgabe:	1	2	3	4	5
Punkte:					

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Prüfung 200 Punkte zu erreichen.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn, dies wird **explizit** ausgeschlossen.

Anmerkung:

Diese Lösung kann Fehler enthalten.

Aufgabe 1 8+16=24 Punkte

Sei σ eine beliebige Signatur.

(i) Ordnen Sie die Logiken $\mathrm{FO}[\sigma], \mathrm{MSO}[\sigma]$ und $\mathrm{ESO}[\sigma]$ bezüglich ihrer Ausdrucksstärke* auf der Klasse aller Strukturen **A**. Sie brauchen Ihre Antwort **nicht zu begründen**.

$\mathrm{FO} <^{A} \mathrm{MSO}$; $\mathrm{FO} <^{A} \mathrm{ESO}$; MSO unvergleichbar ESO

(ii) Ordnen Sie die Logiken $\mathrm{FO}[\sigma], \mathrm{MSO}[\sigma]$ und $\mathrm{ESO}[\sigma]$ bezüglich ihrer Ausdrucksstärke* auf der Klasse aller endlichen Wortstrukturen **W**. **Begründen Sie Ihre Antwort**.

Aus VL wissen wir, dass die Sprache $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w$ enthält eine gerade Anzahl an $a\}$, mit $\Sigma := \{a\}$, nicht in FO dargestellt werden kann, wohl aber in MSO und ESO. Daraus folgt $\mathrm{FO} <^{W} \mathrm{MSO}$; $\mathrm{FO} <^{W} \mathrm{ESO}$
Aus VL wissen wir, dass MSO und ESO beide die regulären Sprachen auf W darstellen können, aber kann ESO auch nicht reguläre Sprachen, wie z. b. Palindromsprachen, darstellen. Also gilt $\mathrm{MSO} <^{W} \mathrm{ESO}$.

Hier fehlt die Begründung, warum FO <^W MSO und FO <^W ESO gilt.

Das wäre in etwa: Da FO in MSO und ESO enthalten ist, aber die Sprache „gerade viele a“ nicht FO-, jedoch mit existenziellen Mengenquantoren sowohl MSO- als auch ESO-definierbar ist, gilt FO <^W MSO und FO <^W ESO

(∗) **Erinnerung:** Seien L_1 und L_2 Logiken und sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Strukturen. L_2 ist *ausdrucksstärker auf* $\mathcal{K}$ als L_1, geschrieben $L_1 \preceq^{\mathcal{K}} L_2$, wenn jede Formel aus L_1 logisch äquivalent innerhalb der Klasse $\mathcal{K}$ zu einer Formel in L_2 ist. Entsprechend ist L_2 *echt ausdrucksstärker als* L_2 *auf* $\mathcal{K}$, geschrieben $L_1 \prec^{\mathcal{K}} L_2$, wenn $L_1 \preceq^{\mathcal{K}} L_2$ aber $L_2 \not\preceq^{\mathcal{K}} L_1$.

Aufgabe 2 6+6+18+18=48 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ ein Alphabet und sei $\sigma_\Sigma := \{\leq, s, P_a, P_b, P_c\}$ die zugehörige Signatur der Wortstrukturen.

(i) Definieren Sie die durch eine Formel $\varphi \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$ definierte Sprache $\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \Sigma^+$.

Aufgabe 2

(i) $\mathcal{L}(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ \mid$ ~~Die Formel~~ die Formel φ ist in der Wortstruktur wahr$\}$ $\mathfrak{W}_w \models \varphi$

(ii) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ MSO-definierbar ist.

Sprache L ist MSO definierbar, wenn es eine Formel φ in MSO gibt, sodass $L = L(\varphi)$.

(iii) Betrachten Sie folgende Sprache

$$L := \{w \in \Sigma^+ : \text{zwischen je zwei Buchstaben } c \text{ in } w \text{ steht eine gerade Anzahl von } b\text{s}\}.$$

Geben Sie eine MSO-Formel φ an, die die Sprache L definiert.

Hinweis: Sie dürfen die Formeln $\varphi_{\min}(B, x)$, $\varphi_{\max}(B, x)$ verwenden, welche für eine Menge B entscheiden ob x das Minimum beziehungsweise das Maximum in B ist bezüglich $\leq \in \sigma_\Sigma$.

$$\varphi := \forall x \forall y \big((P_c(x) \wedge P_c(y) \wedge x < y) \rightarrow \exists B (\forall z (z \in B \leftrightarrow x < z < y \wedge P_b(z)) \wedge \varphi_{\text{gerade}}(B))\big)$$

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(iv) Sei $\varphi_X(p,q) := p \in X \wedge q \in X \wedge p \leq q \wedge \forall z((p < z < q) \rightarrow z \notin X)$ eine Formel, die die Nachfolgerelation in X definiert. D.h. $\varphi_X(p,q)$ gilt genau dann für Positionen p und q, wenn q die nächste Position in X nach p ist.

Betrachten Sie nun folgende Formel

$$\varphi := \exists X \left(\begin{array}{l} \min \in X \wedge \max \in X \wedge \\ \forall p \forall q \left(\varphi_X(p,q) \rightarrow \exists z \left(\begin{array}{c} p < z \wedge z+2 < q \wedge \\ P_c(z) \wedge P_a(z+1) \wedge P_c(z+2) \wedge \\ \forall x \left(\begin{array}{c} (p < x < z \rightarrow P_a(x)) \wedge \\ (z+2 < x < q \rightarrow P_b(x)) \end{array} \right) \end{array} \right) \right) \end{array} \right).$$

Geben Sie die Sprache $\mathcal{L}(\varphi)$ explizit an.

$\mathcal{L}(\varphi) = a^* c a^+ c b^*$

Aufgabe 3 34 Punkte

Sei $\Gamma := \{a, b\}$ mit $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \{0, 2\}$ ein Rangalphabet. Geben Sie einen $\mathrm{NBA}_{\downarrow}$ an, der die Sprache aller Γ-Bäume T akzeptiert, die **mindestens zwei** mit a beschriftete Blätter enthalten.

Wir definieren $M := (\{q_2, q_1, q_0\}, \Gamma, \{q_2\}, \Delta)$ mit

$$\Delta := \{(q_2, \overset{z \in \{a,b\}}{a/b}, q_i, q_j) \mid i + j = 2\} \cup$$
$$\{(q_1, a/b, q_i, q_j) \mid i + j = 1\} \cup$$
$$\{(q_0, a/b, q_0, q_0)\} \cup \{(q_1, a), (q_0, a), (q_0, b)\}$$

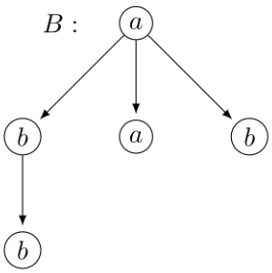
Anmerkung: Zu schreiben "a/b" ist verboten. Stattdessen sollte man dort bspw. "z" schreiben und später sagen, dass z € {a, b} stammt.

Aufgabe 4 8 + 8 + 16 + 16 = 48 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $\Gamma := \Sigma \cup \{\circ\}$. Ein Σ-*Baum* (T, β) ist ein (gerichteter) Baum $T = (V_T, E_T)$ zusammen mit einer Beschriftungsfunktion $\beta : V(T) \to \Sigma$. Wir erweitern Γ zu einem Rangalphabet mit Rangfunktion rg auf Γ via $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \{0, 1\}$ und $\mathrm{rg}(\circ) = \{1, 2\}$.

Seien weiter $\sigma_\Sigma := \{E, P_a, P_b\}$ und $\sigma_\Gamma := \{P_a, P_b, P_\circ, S_1, S_2\}$, wobei E, S_1, S_2 2-stellige und P_x 1-stellige Relationen für jedes $x \in \Gamma$ sind.

(i) Betrachten Sie den folgend aufgeführten Σ-Baum $B = (V_B, E_B)$. Geben Sie eine zugehörige σ_Σ-Struktur $\mathcal{B} = (V_B, E^\mathcal{B}, P_a^\mathcal{B}, P_b^\mathcal{B})$ an die B kodiert.

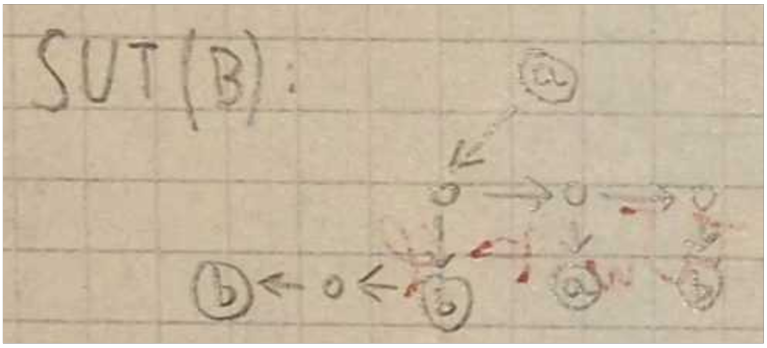


Wir benennen die fünf Knoten um: v_1: Wurzel, v_2: Linkes Kind, v_3: mittleres Kind, v_4: rechtes Kind, v_5: Kind von v_4

Daraus folgt: $V_B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E^B = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_5)\}$, $P_a^B = \{v_1, v_3\}$, $P_b^B = \{v_2, v_4, v_5\}$

Erinnerung: Sei Σ-Tree die Menge aller σ_Σ-Strukturen die Σ-Bäume kodieren und Γ-Tree die Menge aller σ_Γ-Strukturen die Γ-Bäume kodieren. Wir erinnern an die Definition von SUT : Σ-Tree $\to$ Γ-Tree aus der Vorlesung. Insbesondere erinnern wir daran, dass für $\mathcal{T} = (V_T, E^\mathcal{T}, P_a^\mathcal{T}, P_b^\mathcal{T}) \in \Sigma$-Tree und $\mathcal{T}' = \mathrm{SUT}(\mathcal{T})$ mit $\mathcal{T}' = (V_T', S_1^{\mathcal{T}'}, S_2^{\mathcal{T}'}, P_a^{\mathcal{T}'}, P_b^{\mathcal{T}'}, P_\circ^{\mathcal{T}'})$ gilt dass $V_T \subset V_T'$, $P_a^\mathcal{T} = P_a^{\mathcal{T}'}$,$P_b^\mathcal{T} = P_b^{\mathcal{T}'}$ und $P_\circ^{\mathcal{T}'} = V_T' \setminus V_T$.

(ii) Betrachten Sie den oben aufgeführten Σ-Baum $B = (V_B, E_B)$ aus Unteraufgabe (i). Geben Sie SUT$(\mathcal{B})$ an. (Sie dürfen den zugehörigen Γ-Baum malen um die Relationen und Beschriftungen anzugeben).



Anmerkung: Der rote Stift, welcher auf der anderen Seite des Blatts verwendet wurde, sagt nichts über den abgebildeten SUT aus.

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

Seien nun $\varphi \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$ und $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ wie oben; insbesondere $\mathcal{T}' = \mathrm{SUT}(\mathcal{T})$.

(iii) Geben Sie eine Formel $\varphi_E(x, y) \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Gamma]$ an, so dass für $u, v \in V'_T$ gilt; $\mathcal{T}' \models \varphi_E[u, v]$ genau dann, wenn $u, v \in V_T \subset V'_T$ und $\{u, v\} \in E^{\mathcal{T}}$.

Hinweis: Sie dürfen die Formel $\psi_{\mathrm{Pfad}}(x, y) \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Gamma]$ nutzen, wobei $\mathcal{T}' \models \psi_{\mathrm{Pfad}}[u, v]$ genau dann wenn es einen gerichteten Pfad in $\mathcal{T}'$ von u nach v gibt.

Also $\varphi_E(x,y) := x E y \wedge \neg P_0(x) \wedge \neg P_0(y) \wedge$
$\exists P. \forall z. z \in P \rightarrow P_0(z) \wedge \varphi_{Pfad}(x,z) \wedge \varphi_{Pfad}(z,y)$

Erinnerung: Mit Hilfe von (*iii*) kann man wie in der Vorlesung gezeigt eine Abbildung $\Theta : \mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma] \to \mathrm{MSO}[\sigma_\Gamma]$ definieren so dass für $\mathcal{T} \in \Sigma$-Tree und $\varphi \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$ gilt $\mathcal{T} \models \varphi \iff \mathrm{SUT}(\mathcal{T}) \models \Theta(\varphi)$.

(iv) Gegeben SUT und Θ wie oben, zeigen Sie dass $\mathrm{MC}(\mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma], \Sigma\text{-Tree})$ parametrisiert mit $|\varphi|$ in FPT ist.

Hinweis: Sie können davon ausgehen, dass es eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt so dass das Berechnen von $\mathrm{SUT}(\mathcal{T})$ und $\Theta(\varphi)$ jeweils in Zeit $f(|\varphi|)\,|V_T|^c$ für ein festes $c \in \mathbb{N}$ möglich ist.

Für eine Eingabe $\mathcal{T}, \varphi$ berechnen wir
$\mathrm{SUT}(\mathcal{T})$ und $\Theta(\varphi)$ in $f_1(|\varphi|)\,|V_T|^{c_1}$.
Dann berechnen wir wie in der VL gesehen
den NBA $\mathcal{A}$ für den gilt

$\mathcal{A}$ akzeptiert $\mathcal{T}' \iff \mathcal{T}' \models \Theta(\varphi)$,

in Zeit $f_2(|\varphi|)$.
Wir simulieren $\mathcal{A}$ auf $\mathrm{SUT}(\mathcal{T})$ in
Zeit $|V_T|^{c_2}$. Es gilt

$\mathcal{T} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{A}$ $\mathrm{SUT}(\mathcal{T})$ akzeptiert.

Insgesamt brauchen wir also $f_1(|\varphi|) \cdot |V_T|^{c_1} +$
$f_2(|\varphi|) + |V_T|^{c_2} \leq f(|\varphi|) \cdot |V_T|^{c}$.

Aufgabe 5 4 + 16 + 26 = 46 Punkte

Sei $\sigma := \{E, R, G, B\}$, wobei R, G, B einstellige und E ein zweistelliges Relationssymbol ist.

Wir betrachten die Klasse $\mathcal{K}$ aller endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A} := (A, E^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, G^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}})$ in denen $(A, E^{\mathcal{A}})$ ein gerichteter Pfad endlicher Länge ist und *jeder* Knoten aus A in *genau einer* der Mengen $R^{\mathcal{A}}, G^{\mathcal{A}}$ und $B^{\mathcal{A}}$ vorkommt. Wir nennen Knoten aus $R^{\mathcal{A}}$ *rot* und entsprechend Knoten aus $G^{\mathcal{A}}$ *grün* und aus $B^{\mathcal{A}}$ *blau*.

Sei nun $\mathbf{L} \subseteq \mathcal{K}$ die Klasse aller Strukturen aus $\mathcal{K}$, mit der Eigenschaft, dass zwischen je zwei „roten" Knoten eine gerade Anzahl an „blauen" Knoten vorkommt.

$\mathcal{W}_1$ 0—1—2—3—4—5—6—7—8—9—10—11—12

$\mathcal{W}_2$ 0—1—2—3—4—5—6—7—8—9

Die Strukturen in $\mathcal{K}$ entsprechen also Wortstrukturen über dem Alphabet $\{r, g, b\}$, nur dass keine lineare Ordnung auf A vorhanden ist, sondern stattdessen E die Nachfolgerelation modelliert. Dementsprechend etablieren wir folgende Kurzschreibweise: $\mathcal{W}_1 = rg^2(bgg)^3r$ und $\mathcal{W}_2 = rg^2(bgg)^2r$.

Die Struktur $\mathcal{W}_1$ ist also **nicht** in $\mathbf{L}$, die Struktur $\mathcal{W}_2$ aber schon.

(i) Geben Sie den Satz von Gaifman an.

Jeder Satz $\varphi \in FO$ ist in Gaifman-Normalform, wenn φ eine ~~Boo'sche~~ Boole'schen Kombination basis-lokaler Sätze ist

(ii) Sei $\psi(x) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine 1-lokale Formel. Zeigen Sie, dass es keinen basis-lokalen Satz $\varphi := \exists x_1 \exists x_2 \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le 2} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2 \wedge \bigwedge_{i=1}^{2} \psi(x_i) \Big) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, der $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ unterscheidet.

Angenommen es gäbe ~~einen~~ diesen basis-lokalen Satz φ, wobei ψ eine 1-lokale Formel ist. Dann müssten sich die 1-Umgebungen von x in W_1 und W_2 unterscheiden. In jenen kann man ~~ab~~ x selbst, seinen Vorgänger und Nachfolger sehen. Da aber beide Strukturen die gleiche 1-Umgebungen besitzen, siehe Tabelle$_1$, kann dieser basis-lokale Satz nicht existieren. Widerspruch zur Annahme.

Tabelle$_1$:

Typ:	1-Umgebung*	$\exists$ in W_1?	$\exists$ in W_2?
1	(r, g)	✓	✓
2	(r, g, g)	✓	✓
3	(g, g, b)	✓	✓
4	(g, b, g)	✓	✓
5	(b, g, g)	✓	✓
6	(g, g, r)	✓	✓
7	(g, r,)	✓	✓

*wobei der mittige Buchstabe immer der betrachtete Knoten ist

Die aktuelle Tabelle ist unzureichend.Diese Tabelle müsste man noch erweitern um die Anzahl der Vorkomnisse.

Achtung: es geht auf der nächsten Seite weiter!

(iii) Seien $k, r \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig und $\varphi := \exists x_1 \dots \exists x_k \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le k} \operatorname{dist}(x_i, x_j) > 2r \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \psi(x_i) \Big) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ein basis-lokaler Satz mit Quantorenrang k und Radius r, wobei $\psi(x) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine r-lokale Formel ist. Zeigen Sie, dass φ die Klasse $\mathbf{L}$ nicht in $\mathcal{K}$ definiert.

Hinweis: Geben Sie zwei σ-Strukturen $\mathcal{W}_1^{(r,k)} \notin \mathbf{L}$ und $\mathcal{W}_2^{(r,k)} \in \mathbf{L}$ an für die gilt:

$$\mathcal{W}_1^{(r,k)} \models \varphi \iff \mathcal{W}_2^{(r,k)} \models \varphi.$$

Nutzen Sie die oben eingeführte Kurzschreibweise!

$W_2^{(r,k)} = r\, b^x\, r$ $\qquad$ $W_1^{(r,k)} = r\, b^x b\, r$

$x = 2r \cdot k + 2$

~~Wir ba~~ Aus $W_2^{(r,k)} \in L$ folgt $W_2 \models \varphi$.
Somit gibt es eine erfüllende Belegung für $x_1 \dots x_k$. Für ein x_i, $1 \le i \le k$, definieren wir eine erfüllende Belegung für φ auf W_1 wie folgt. Wenn x_i abstand $\le 2r$ zu dem ersten Knoten hat wählen wir es gleich. Wenn es abstand $\le 2r$ zum letzten Knoten hat wählen wir einen Knoten in W_1 mit dem selben abstand, sonst wählen wir es gleich.
Die r-Nachbarschaften der Belegungen sind gleich. $\lightning$