Gedächtnisprotokoll der Modulprüfung in LMI, SoSe 2024 (Schriftliche Prüfung) v. 0.1 Ersttermin

Präambel

Auf den nachfolgenden Seiten befindet sich ein Gedächtnisprotokoll zur Modulprüfung in Logische Methoden der Informatik aus dem Sommersemester 2024.
Dieses Jahr wurde die Prüfung als schriftliche Prüfung durchgeführt und hatte, basierend auf dem Vergleich zu bisherigen Gedächtnisprotokollen, einen anderen Charakter als die zuletzt durchgeführten mündlichen Prüfungen in diesem Modul.
Vorab sei erwähnt, dass es sich hierbei um ein Gedächtnisprotokoll handelt, folglich können Fehler nicht gänzlich ausgeschlossen werden, auch Formulierungen in der eigentlichen Prüfung können abweichend gewesen sein.
In der Klausur waren insgesamt 200 Punkte erreichbar.
Lösungen zur Klausur werde ich nicht bereitstellen.
Falls nicht anders ausgewiesen, so waren alle Antworten zu begründen.
Wichtiger Hinweis zu Aufgabe 5 (ii): Zu zeigen war, dass für gegebene Werte k, r kein basis-lokaler Satz existieren kann, welcher die beiden Strukturen unterscheiden kann. Solch ein Satz existierte aber leider, bedingt durch eine kurzfristige Änderung der Aufgabenstellung, folglich war die Aufgabe in dieser Gestalt nicht lösbar; Die erreichbaren Punkte der Teilaufgabe fanden somit in der Wertung keine Berücksichtigung, d.h. mit 184/200 Klausurpunkten war die Klausur zu 100 Prozent gelöst. Erreichte Punkte in der Teilaufgabe wurden dennoch angerechnet, zur Vermeidung von Nachteilen.

Punkteverteilung:
Aufgabe 1: 8 + 16 = 24 Punkte
Aufgabe 2: 6 + 6 + 18 + 18 = 48 Punkte
Aufgabe 3: 34 Punkte
Aufgabe 4: 8 + 8 + 16 + 16 = 48 Punkte
Aufgabe 5: 4 + 16 + 26 = 46 Punkte
$\Sigma = 200$

Viel Erfolg beim Lernen!

(i)	(ii)	$\sum$

Aufgabe 1

Sei σ eine beliebige Signatur.

(i) Ordnen Sie die Logiken FO[σ], MSO[σ] und ESO[σ] bezüglich ihrer Ausdrucksstärke* auf der Klasse aller Strukturen **A**.
Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.
(*) **Bemerkung:** Seien L_1, L_2 Logiken und sei $\mathcal{K}$ eine Klasse von Strukturen. L_2 ist ausdrucksstärker als L_1 auf $\mathcal{K}$, in Zeichen $L_1 \preceq^{\mathcal{K}} L_2$, wenn jede Formel aus L_1 logisch äquivalent innerhalb der Klasse $\mathcal{K}$ zu einer Formel aus L_2 ist. Analog ist L_2 **echt** ausdrucksstärker als L_1 auf der Klasse $\mathcal{K}$, in Zeichen $L_1 \prec^{\mathcal{K}} L_2$, falls $L_1 \preceq^{\mathcal{K}} L_2$ aber $L_2 \npreceq^{\mathcal{K}} L_1$

(ii) Ordnen Sie die Logiken FO[σ], MSO[σ] und ESO[σ] bezüglich ihrer Ausdrucksstärke* auf der Klasse aller endlichen Wortstrukturen **W**. **Begründen Sie Ihre Antwort.**

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	$\sum$

Aufgabe 2

Sei $\Sigma := \{a, b, c\}$ ein Alphabet und sei $\sigma_\Sigma := \{\leq, s, P_a, P_b, P_c\}$ die zugehörige Signatur der Wortstrukturen.

(i) Definieren Sie die durch eine Formel $\varphi \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$ definierte Sprache $\mathcal{L}(\varphi) \subseteq \Sigma^+$.

(ii) Definieren Sie, was es bedeutet, dass eine Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ MSO-definierbar ist.

(iii) Betrachten Sie die folgende Sprache:
$L := \{w \in \Sigma^+ \mid \text{zwischen je zwei Buchstaben } c \text{ in } w \text{ steht eine gerade Anzahl an } b\text{s.}\}$
Geben Sie eine MSO-Formel φ an, welche die Sprache L definiert.
Bemerkung: Sie dürfen Formeln $\varphi_{min}(B, x), \varphi_{max}(B, x)$ verwenden, welche für eine Menge B entscheidet ob x das Minimum oder Maximum in B bezüglich $\leq \in \sigma_\Sigma$ ist.

(iv) Sei $\varphi_X(p, q) := p \in X \wedge q \in X \wedge p \leq q \wedge \forall z((p < z < q) \to z \notin X)$ eine Formel, welche die Nachfolgerelation in X definiert, also $\varphi_X(p, q)$ gilt genau dann für Positionen p und q, wenn q die nächste Position in X nach p ist.
Betrachten Sie nun die Formel

$$\begin{aligned}
&\varphi := \exists X\Bigg(\min \in X \wedge \max \in X \wedge \\
&\forall p \forall q\Bigg(\varphi_X(p, q) \to \exists z\Bigg(p < z \wedge z + 2 < q \wedge P_c(z) \wedge P_a(z+1) \wedge P_c(z+2) \\
&\wedge \forall x\Bigg((p < x < z \to P_a(x)) \wedge (z + 2 < x < q \to P_b(x)\Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

Geben Sie die Sprache $\mathcal{L}(\varphi)$ an.

Σ

Aufgabe 3

Sei $\Gamma := \{a, b\}$ mit $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \{0, 2\}$ ein Rangalphabet.
Geben Sie einen einen $\mathrm{NBA}_{\downarrow}$ an, der die Sprache aller Γ-Bäume T akzeptiert, die mindestens zwei mit a beschriftete Blätter enthalten.

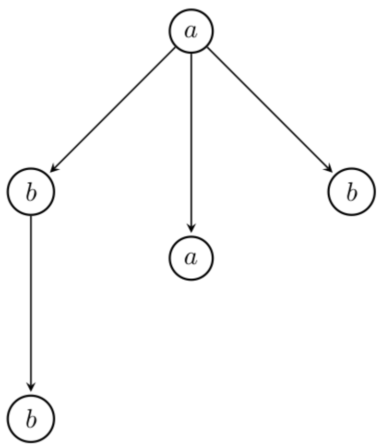
(i)	(ii)	(iii)	(iv)	Σ

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $\Gamma := \Sigma \cup \{\circ\}$. Ein Σ-Baum (T, β) ist ein (gerichteter) Baum $T = (V_T, E_T)$ zusammen mit einer Beschriftungsfunktion $\beta : V(T) \to \Sigma$. Wir erweitern Γ um ein Rangalphabet mit Rangfunktion rg auf Γ mit $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b) = \{0, 1\}$ und $\mathrm{rg}(\circ) = \{1, 2\}$.
Seien weiterhin $\sigma_\Sigma := \{E, P_a, P_b\}$ und $\sigma := \{P_a, P_b, P_\circ, S_1, S_2\}$, wobei E, S_1, S_2 2-stellige, P_x 1-stellige Relationen für $x \in \Gamma$ sind.

(i) Betrachten Sie nun den folgenden Σ-Baum $B = (V_B, E_B)$. Geben Sie eine zugehörige σ_Σ-Struktur $\mathcal{B} = (V_B, E^{\mathcal{B}}, P_a{}^{\mathcal{B}}, P_b{}^{\mathcal{B}})$ an, welche B kodiert.

B:



(ii) Betrachten Sie den oben aufgeführten Σ-Baum $B = (V_B, E_B)$ aus Aufgabenteil (i). Geben Sie $\mathrm{SUT}(\mathcal{B})$ an (Aufmalen des Γ-Baums genügt zur Angabe der Realationen).

(iii) Betrachten Sie nun $\varphi \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$ und $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ wie oben, sei $\mathcal{T}' = \mathrm{SUT}(\mathcal{T})$. Geben Sie eine Formel $\varphi_E(x, y) \in \mathrm{MSO}[\sigma_\Gamma]$ an, so dass für alle $u, v \in V_T{}'$ gilt: $\mathcal{T}' \vDash \varphi_E[u, v]$ genau dann, wenn es einen gerichteten Pfad in $\mathcal{T}'$ von u nach v gibt.

(iv) Gegeben SUT und Θ wie oben (vgl. Abbildung Θ aus der Vorlesung für Transformation von $\mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$ zu $\mathrm{MSO}[\sigma_\Gamma]$, musste man wissen, gab einen Hinweis under (iii)), zeigen Sie dass MC($\mathrm{MSO}[\sigma_\Sigma]$, Σ-Tree) parametrisiert mit $|\varphi|$ in FPT ist.

(i)	(ii)	(iii)	$\sum$

Aufgabe 5

Sei $\sigma \coloneqq \{E, R, G, B\}$, wobei R, G, B 1-stellige und E ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Betrachten wir die Klasse $\mathcal{K}$ aller endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A} \coloneqq (A, E^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, G^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}})$ in denen $(A,\, E^{\mathcal{A}})$ ein gerichteter Pfad endlicher Länge ist und jeder Knoten aus A in genau einer der Mengen $R^{\mathcal{A}}, G^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}$ vorkommt. Wir nennen Knoten aus $R^{\mathcal{A}}$ rot gefärbt, analog grün und blau für die anderen Mengen. Sei $\mathbf{L} \subseteq \mathcal{K}$ die Klasse aller Strukturen aus $\mathcal{K}$ mit der Eigenschaft, dass zwischen je zwei roten Knoten eine gerade Anzahl blauer Knoten vorkommt.
Nachfolgend die zwei zu betrachtenden Strukturen $\mathcal{W}_1$, $\mathcal{W}_2$.

Die Strukturen in $\mathcal{K}$ entsprechen Wortstrukturen über dem Alphabet $\{r, g, b\}$, mit dem Unterschied, dass keine lineare Ordnung auf A existiert, stattdessen modelliert E die Nachfolgerelation. Wir führen die folgende Kurzschreibweise ein: $\mathcal{W}_1 = rg^2(bgg)^3r$ und

$\mathcal{W}_2 = rg^2(bgg)^2g^3r$.

Die Struktur $\mathcal{W}_1$ ist also nicht in $\mathbf{L}$, die Struktur $\mathcal{W}_2$ aber schon.

(i) Geben Sie den Satz von Gaifman an.

(ii) Sei $\psi(x) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine 1-lokale Formel. Zeigen Sie, dass es keinen basis-lokalen Satz $\varphi := \exists x_1 \exists x_2 \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le 2} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2 \wedge \bigwedge_{i=1}^{2} \psi(x_i) \right) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ gibt, der $\mathcal{W}_1$ und $\mathcal{W}_2$ unterscheidet.

(iii) Seien $k, r \in \mathbb{N}_{>0}$ beliebig und $\varphi := \exists x_1 ... \exists x_k \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le k} \mathrm{dist}(x_i, x_j) > 2r \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} \psi(x_i) \right) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ein basis-lokaler Satz mit Quantorenrang k und Radius r, wobei $\psi(x) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine r-lokale Formel ist. Zeigen Sie, dass φ die Klasse $\mathbf{L}$ nicht in $\mathcal{K}$ definiert.
Bemerkung: Geben Sie zwei σ-Strukturen ${\mathcal{W}_1}^{(r,k)} \notin \mathbf{L}$ und ${\mathcal{W}_2}^{(r,k)} \in \mathbf{L}$ an für die gilt:

$$ {\mathcal{W}_1}^{(r,k)} \models \varphi \iff {\mathcal{W}_2}^{(r,k)} \models \varphi. $$

Nutzen Sie die oben eingeführte Kurzschreibweise.