

Probeklausur: Logische Methoden in der Informatik

Aufgabe:	1	2	3	4
Punkte:				

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Prüfung 200 Punkte zu erreichen.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Alle Antworten sind zu begründen, es sei denn, dies wird **explizit** ausgeschlossen.

Anmerkung:

Diese Lösung wurde in der Großübung am 16.07.2026 präsentiert. Beim Übernehmen der Lösung können sich Fehler eingeschlichen haben.

Aufgabe 1

14 + 14 + 14 = 42 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ eine Signatur mit zweistelligem Relationssymbol E .

Formalisieren Sie folgende Aussagen mit Hilfe von $\text{FO}[\sigma]$, $\text{MSO}[\sigma]$ oder $\text{ESO}[\sigma]$ Formeln (geben Sie für jede Aussage nur eine Formel ohne Begründung an). Geben Sie auch ohne Begründung an, zu welcher Logik ihre Formel gehört.

- (i) Sei $k \geq 1$ fest. Ein ungerichteter Graph G (aufgefasst als σ -Struktur) erfüllt die Formel genau dann, wenn es zwei Knoten in G gibt, so dass jeder Pfad der Länge höchstens k mindestens einen der beiden Knoten enthält.

(Erinnerung: Die Länge eines Pfades ist die Anzahl der Kanten im Pfad.)

$$\varphi_1 := \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \neq x_2 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k+1} \forall y_i \forall y_i \left(\bigwedge_{1 \leq j \leq i} E(y_j, y_{j+1}) \wedge \bigwedge_{1 \leq j < l \leq i} y_j \neq y_l \rightarrow \bigvee_{1 \leq j \leq i} (y_j = x_1 \vee y_j = x_2) \right))$$

$\varphi_1 \in \text{FO}[\sigma]$

- (ii) Ein Kreis C_n auf n Knoten (aufgefasst als σ -Struktur) erfüllt die Formel genau dann, wenn n gerade ist.

$$\varphi_2 := \exists A \exists B \left(\forall x (A(x) \leftrightarrow \neg B(x)) \wedge \forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow (A(x) \leftrightarrow B(y))) \right)$$

$\varphi_2 \in \text{MSO}[\sigma], \varphi_2 \in \text{ESO}[\sigma]$

In MSO, weil wir monadische Variablen A und B nehmen.
In ESO, weil wir diese nur existenziell ($\exists$) nehmen.

- (iii) Ein Graph G (aufgefasst als σ -Struktur) erfüllt die Formel genau dann, wenn G ein perfektes Matching hat. (**Erinnerung:** Ein perfektes Matching $M \subseteq E(G)$ ist eine Menge von Kanten, so dass jeder Knoten in genau einer Kante aus M vorkommt).

$$\varphi_3 := \exists M (M \subseteq E \wedge \forall x \exists y (M(x, y) \wedge \forall z (z \neq y \rightarrow \neg M(x, z))))$$

$$\varphi_3 \in \text{ESO}[\sigma]$$

Aufgabe 2

46 Punkte

Sei $\Gamma := \{a, b\}$ mit $\text{rg}(a) = \text{rg}(b) = \{0, 2\}$ ein Rangalphabet.

Geben Sie ohne Begründung einen $\text{NBA}_\downarrow$ an, der die Sprache aller Γ -Bäume T akzeptiert, die **eine gerade Anzahl** mit **a beschrifteter Blätter** enthalten. (Ein $\text{NBA}_\uparrow$ gibt immer noch Teilpunkte).

Wir definieren Automaten $A = (\{q_0, q_1\}, \Gamma, \{q_0\}, \Delta)$
 mit $\Delta = \{(q_0, a/b, q_0, q_0)\} \cup \{(q_0, a/b, q_1, q_1)\}$
 $\cup \{(q_1, a/b, q_0, q_1)\} \cup \{(q_1, a/b, q_1, q_0)\}$
 $\cup \{(q_1, a), (q_0, b)\}$

Aufgabe 3

8 + 40 = 48 Punkte

- (i) Geben Sie die Definition von *parametrisierten Problemen* und der Komplexitätsklasse FPT an.

Ein parametrisiertes Problem über einem Alphabet Σ ist eine Sprache $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$.
 Die Komplexitätsklasse FPT ist die Klasse der parametrisierten Probleme $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ für die es eine berechenbare Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und einen Algorithmus gibt, der auf der Eingabe von (w, k) in Zeit $f(k) \cdot |w|^c$ entscheidet, ob $(w, k) \in \mathcal{L}$ gilt, wobei c eine Konstante ist.

- (ii) Sei Σ ein Alphabet und sei $\mathcal{K}$ die Klasse aller Wortstrukturen über dem Alphabet Σ .
 a) Zeigen Sie, dass das Auswertungsproblem $\text{MC}(\text{MSO}, \mathcal{K})$ von MSO auf der Klasse $\mathcal{K}$ fixed-parameter tractable mit Parameter Formellänge ist.

Wir konstruieren einen Algorithmus, welcher auf der Eingabe von $W_w \in \mathcal{K}$ und $\varphi \in \text{MSO}$ wie folgt arbeitet:

1. Konstruiere w aus W_w
2. Übersetze φ in einen NEA mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\varphi)$ nach dem Verfahren aus dem Beweis des Satzes von Büchi & Elgot
3. Lasse A auf w laufen. Falls A akzeptiert, gebe JA aus, ^{andernfalls} NEIN

Wir wissen, dass $W_w \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $w \in \mathcal{L}(\varphi)$ gilt nach der Definition von MSO definierbaren Sprachen.

Da wir in Schritt 2 einen Automaten wählen, welcher die gleiche Sprache erkennt, gilt $W_w \models \varphi$ genau dann, wenn $w \in \mathcal{L}(A)$ gilt.

Somit entscheidet der Algorithmus korrekt, ob $W_w \models \varphi$ gilt.

Bezüglich der Laufzeit gilt: Schritt 1 geht in $O(|W_w|)$.
 Schritt 2 geht in $f(|\varphi|)$ für eine ~~Formel~~ Funktion f , da die Konstruktion des Automaten nur von φ abhängt und aus eindeutig definierten Konstruktionsschritten besteht, die im Beweis vom Satz definiert wurden.
 Schritt 3 geht in $O(|w|) = O(|W_w|)$, da der Automat einen Schritt für jeden Buchstaben macht.

Insgesamt ergibt sich eine Laufzeit von $f(|\varphi|) + O(|W_w|)$, also in $f(|\varphi|) \cdot |W_w|^c$, was die Zugehörigkeit zu FPT beweist.

Seite 7 von 10

- b) Zeigen Sie, dass (unter der üblichen Annahme dass $P \neq NP$ gilt) $MC(MSO, K) \notin FPT$ mit der Größe der Eingabestruktur als Parameter.

(**Hinweis:** Sie dürfen die aus der Vorlesung bekannte Komplexität von MSO Model Checking im Beweis verwenden.)

Angenommen $MC(MSO, K) \in FPT$. Dann gibt es einen Algorithmus, der in Zeit $f(|W|) \cdot |W|^c$ entscheidet, ob $W \models \varphi$ gilt für eine Wortstruktur $W \in K$ und eine Formel $\varphi \in MSO$, wobei f eine berechenbare Funktion ist und c eine Konstante. Wir wählen nun ein festes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und betrachten die Klasse K_n aller Wortstrukturen aus K der Größe n . Nun gilt $f(n) = m$ für eine ^{festen Zahl} $m \in \mathbb{N}$. Also entscheidet der gleiche Algorithmus das Problem $MCC(MSO, K_n)$ in Zeit $m \cdot n^c$ für alle Eingaben und bezeugt damit $MCC(MSO, K) \in P$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $MCC(MSO, C)$ PSPACE-vollständig ist für jede Klasse C endlicher Strukturen, also auch für die Klasse K_n . Wenn $MCC(MSO, K_n) \in P$ ist und PSPACE-vollständig ist, folgt $P = PSPACE$ und damit auch $P = NP$, was ein Widerspruch zur Annahme $P \neq NP$ darstellt.

Aufgabe 4

18 + 16 + 16 + 14 = 64 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Wir betrachten in dieser Aufgabe IFP + C-Formeln ausgewertet auf Wortstrukturen über dem Alphabet Σ .

(i) Sei $\varphi_1 := \forall x \forall y ((P_a(x) \wedge P_b(y)) \rightarrow x \leq y)$.

a) Geben Sie die durch φ_1 definierte Sprache $\mathcal{L}(\varphi_1) \subseteq \Sigma^+$ an.

a) Geben Sie die durch φ_1 definierte Sprache $\mathcal{L}(\varphi_1) \subseteq \Sigma^+$ an.
Es gilt $\mathcal{L}(\varphi_1) = \mathcal{L}(a^+b^+) \cup \mathcal{L}(a^*b^+)$.

Da $\mathcal{L}(\varphi_1) \subseteq \Sigma^+$, kann die Sprache $\mathcal{L}(a^*b^+)$ nicht gelten.

b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathcal{L}(\varphi_1)$ regulär ist.

Es gilt $\varphi_1 \in \text{FO}$ keine Fixpunkte und Zähler benutzt.
Also gilt auch $\varphi_1 \in \text{MSO}$. Daraus folgt aus dem Satz von Büchi & Elgot, dass $\mathcal{L}(\varphi_1)$ regulär ist.

(ii) Sei $\varphi_2 := \left[\text{ifp}_{R,x,y} \left(P_a(x) \wedge P_b(y) \wedge \left(\exists x' \exists y' (R(x', y') \wedge x = x' + 1 \wedge y' = y + 1) \right) \right) \right](x, y)$.

a) Geben Sie die Induktionsstufen der inflationären Fixpunktinduktion von φ_2 auf dem Wort $aabb$, d.h. auf der Wortstruktur $W_{aabb} := (\{1, 2, 3, 4\}, \leq^{W_{aabb}}, s^{W_{aabb}}, P_a^{W_{aabb}}, P_b^{W_{aabb}})$ an.

$R^0 = \emptyset$, $R^1 = \{(1, 4)\}$, $R^2 = R^1 \cup \{(2, 3)\} = \{(1, 4), (2, 3)\}$,
 $R^i = R^2$ für alle $i \geq 3$.

b) Geben Sie die Induktionsstufen der inflationären Fixpunktinduktion von φ_2 auf dem Wort $aaabb$, d.h. auf der Wortstruktur $W_{aaabb} := (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq^{W_{aaabb}}, s^{W_{aaabb}}, P_a^{W_{aaabb}}, P_b^{W_{aaabb}})$ an.

an.
 $R^0 = \emptyset$, $R^1 = \{(1, 5)\}$, $R^2 = \{(1, 5), (2, 4)\}$,
 $R^i = R^2$ für alle $i \geq 3$.

(iii) Sei $\varphi_3 := \varphi_1 \wedge \forall x \exists y (\varphi_2(x, y) \vee \varphi_2(y, x))$.

Geben Sie eine Sprache $L \subseteq \Sigma^+$ an, so dass für alle $w \in \Sigma^+$ gilt: $w \in L$ genau dann, wenn $\mathcal{W}_w \models \varphi_3$.

$$L := \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \}$$

(iv) Geben Sie eine Formel $\varphi_4 \in \text{IFP} + \text{C}$ an, die die Sprache $\{(ab)^{2n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ definiert.

$$\varphi_4 := \forall x (x < \max \rightarrow (P_a(x) \leftrightarrow P_b(x+1))) \wedge P_a(\min) \wedge P_b(\max) \\ \wedge \exists i (i = \#_x (P_a(x)) \wedge \exists j \ i = j + j)$$