

Matrikelnummer:

Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

SoSe 2026

Klausurzulassungstest Logische Methoden der Informatik

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Prüfung 22 Punkte zu erreichen.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

Bei jeder Teilaufgabe ist **genau eine** Antwortmöglichkeit richtig.

Auf jede Aufgabe bekommen Sie

$\max\{0, \# \text{ korrekt beantwortete Teilaufgaben} - \# \text{ falsch beantwortete Teilaufgaben}\}$
Punkte.

Um die Klausurzulassung zu erhalten, müssen mindestens **50%** der Punkte erreicht werden.

In diesem Test bezeichnet Graph einen ungerichteten, einfachen, schleifenfreien Graphen.

Aufgabe 1

4 Punkte

Sei $\Sigma := \{a, b\}$.(i) Zu welchem Wort gehört die σ_Σ -Wortstruktur $\mathcal{W} := (\{1, 2, 3\}, \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}, \{(1, 2), (2, 3)\}, P_a^{\mathcal{W}}, P_b^{\mathcal{W}})$ mit $P_a^{\mathcal{W}} := \{1, 3\}$ und $P_b^{\mathcal{W}} := \{2\}$?

- ☐ $abbaaa$
- ☐ $aaaabb$
- ☐ bab
- ☒ aba
- ☐ $bbabbaaa$

(ii) Die Wortstruktur von welchem der folgenden Wörter erfüllt die beiden $\text{FO}[\sigma_\Sigma]$ -Formeln $\forall x(P_a(x) \rightarrow (\exists y(s(x, y) \wedge P_b(y))))$ und $\exists x \exists y(x \neq y \wedge P_a(x) \wedge P_a(y))$?

- ☐ $aabb$
- ☐ $abbbba$
- ☐ $bbbb$
- ☒ $babbab$
- ☐ $aaaa$

(iii) Welcher der folgenden $\text{MSO}[\sigma_\Sigma]$ -Sätze definiert die Sprache $\mathcal{L} := \mathcal{L}(ab^*)$?

- ☐ $\exists x(P_a(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow P_b(y)))$
- ☒ $\exists X(\forall y(X(y) \leftrightarrow y \neq \min) \wedge \forall y(X(y) \leftrightarrow P_b(y)))$
- ☐ $\forall Y \forall z((P_b(z) \leftrightarrow Y(z)) \wedge \neg Y(\min))$
- ☐ $\exists X \exists x(\forall y(x \leq y \rightarrow X(y)) \wedge \forall z(X(z) \leftrightarrow P_b(z)))$

(iv) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

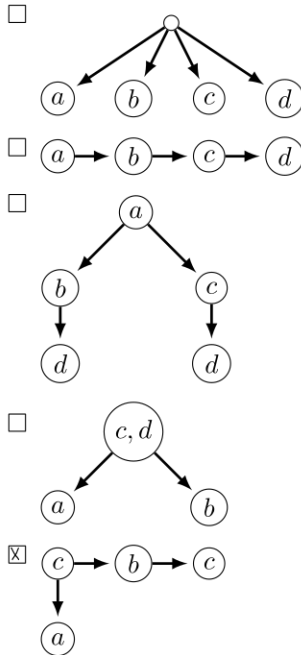
- ☐ Über Wortmodellen gibt es zu jeder MSO -Formel eine äquivalente FO -Formel.
- ☒ Über Wortmodellen gibt es zu jeder MSO -Formel eine äquivalente $\exists \text{MSO}$ -Formel.
- ☐ Über Wortmodellen gibt es zu jeder $\exists \text{MSO}$ -Formel eine äquivalente FO -Formel.

Aufgabe 2

3 Punkte

Sei $\Gamma := \{a, b, c, d\}$ ein Rangalphabet mit $\Gamma_0 := \{a, b, c, d\}$, $\Gamma_1 := \{a, b\}$ und $\Gamma_2 := \{c, d\}$.

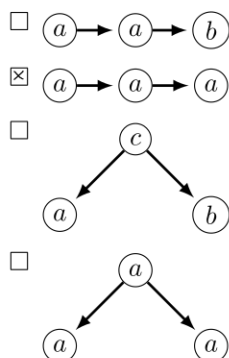
(i) Bei welchem der folgenden beschrifteten Bäume handelt es sich um einen Γ -Baum?



(ii) Welche beiden Automatenmodelle erkennen **nicht** die gleiche Sprachklasse?

- ☐ $\text{NBA}_\downarrow$ und $\text{DBA}_\uparrow$
- ☐ $\text{NBA}_\downarrow$ und $\text{NBA}_\uparrow$
- ☒ $\text{NBA}_\downarrow$ und $\text{DBA}_\downarrow$

(iii) Sei $\mathcal{A} := (\{q_0, q_1\}, \Gamma, \{(b, q_0), (a, q_1), (q_1, a, q_1)\}, \{q_1\})$ ein $\text{NBA}_\uparrow$ (Mit dem Rangalphabet Γ vom Anfang der Aufgabe). Welcher der folgenden Γ -Bäume ist in $\mathcal{L}(\mathcal{A})$?



Aufgabe 3

4 Punkte

- (i) Betrachten Sie die MSO_2 -Formel $\varphi := \exists e \exists f (E(e) \wedge E(f) \wedge \forall x \neg (inc(x, e) \wedge inc(x, f)))$. Für welche der folgenden MSO_1 -Formeln gilt für jeden Graphen, dass sein Standardmodell diese Formel genau dann erfüllt, wenn sein Inzidenzmodell φ erfüllt?

- ☒ $\exists x \exists y \exists z \exists w (E(x, y) \wedge E(z, w) \wedge x \neq z \wedge x \neq w \wedge y \neq z \wedge y \neq w)$
- ☐ $\forall x \exists y \exists z (y \neq z \wedge E(x, y) \wedge E(x, z))$
- ☐ $\exists x \exists y \exists z \exists w (E(x, y) \wedge E(z, w) \wedge \neg E(x, z) \wedge \neg E(y, w))$

- (ii) Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ MSO_1 und MSO_2 sind gleich ausdrucksstark.
- ☐ MSO_1 ist ausdrucksstärker als MSO_2 .
- ☒ MSO_2 ist ausdrucksstärker als MSO_1 .
- ☐ MSO_1 und MSO_2 sind bezüglich Ausdrucksstärke unvergleichbar.

- (iii) Stimmt es, dass die MSO_1 -Formel

$\varphi := \forall X ((\exists y X(y) \wedge \exists z \neg X(z)) \rightarrow \exists a \exists b (X(a) \wedge \neg X(b) \wedge E(a, b)))$ genau dann von einem Graphen (in Standardmodellierung) erfüllt wird, wenn er zusammenhängend ist?

- ☒ Ja.
- ☐ Nein, denn es gibt einen unzusammenhängenden Graphen, der φ erfüllt.
- ☐ Nein, denn es gibt einen zusammenhängenden Graphen, der φ nicht erfüllt.

- (iv) Stimmt es, dass die MSO_2 -Formel

$\varphi := \exists M (M \subseteq E \wedge \forall x (V(x) \rightarrow \exists m (M(m) \wedge inc(x, m))))$ genau dann von einem Graphen (in Inzidenzmodellierung) erfüllt wird, wenn er ein perfektes Matching enthält?

- ☐ Ja.
- ☒ Nein, denn es gibt einen Graphen ohne perfektes Matching, der φ erfüllt.
- ☐ Nein, denn es gibt einen Graphen mit perfektem Matching, der φ nicht erfüllt.

Aufgabe 4

3 Punkte

(i) Damit ein parametrisches Problem $\mathcal{P}$ in der Komplexitätsklasse **FPT** liegt, muss es laut Definition einen Algorithmus geben, der auf Eingabe einer Instanz (w, k) in welcher Zeit entscheidet, ob diese Instanz in $\mathcal{P}$ ist?

- ☒ $f(k) \cdot |w|^c$ für eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und eine Konstante c
- ☐ $f(|w|) \cdot k^c$ für eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und eine Konstante c
- ☐ $f(|w| \cdot k)$ für eine berechenbare Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- ☐ $k^c \cdot |w|^k$ für eine Konstante c
- ☐ $k + |w|^c$ für eine Konstante c

(ii) Welches Problem bezeichnen wir als model-checking Problem für $\mathcal{L}$ und $\mathcal{C}$?

- ☐ Das Problem, auf Eingabe einer Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ zu entscheiden, ob es eine Struktur in $\mathcal{C}$ gibt, die φ erfüllt.
- ☐ Das Problem, auf Eingabe einer Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ zu entscheiden, ob φ von jeder Struktur aus $\mathcal{C}$ erfüllt wird.
- ☒ Das Problem, auf Eingabe einer Formel $\varphi \in \mathcal{L}$ und einer Struktur $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ zu entscheiden, ob φ von $\mathcal{A}$ erfüllt wird.
- ☐ Das Problem, auf Eingabe einer Struktur $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ alle Formeln in $\mathcal{L}$ zu finden, die $\mathcal{A}$ erfüllt.

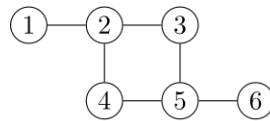
(iii) Von welchem Problem haben wir in der Vorlesung gesehen, dass es in **FPT** liegt?

- ☒ Das model-checking Problem für Graphklassen beschränkter Baumweite und MSO_2 , parametrisiert durch die Baumweite plus die Formellänge.
- ☐ Das model-checking Problem für die Klasse aller Graphen und MSO_1 , parametrisiert durch die Formellänge.
- ☐ Das model-checking Problem für die Klasse aller Wortstrukturen über einem Alphabet und MSO , parametrisiert durch die Größe des Alphabets.

Aufgabe 5

3 Punkte

(i) Betrachten Sie den folgenden Graphen G :



Welcher der folgenden beschrifteten Bäume ist eine Baumzerlegung von G ?

-

(ii) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Was ist die Baumweite des vollständigen Graphen K_n ?

- ☐ $2n$
☐ $n + 1$
☒ $n - 1$
☐ $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
☐ 5

(iii) Was gilt für jede Kante $\{s, t\}$ in einer Baumzerlegung (T, β) eines Graphen G ?

- ☒ $\beta(s) \cap \beta(t)$ ist ein Separator in G
- ☐ $\beta(s) \cap \beta(t) \neq \emptyset$
- ☐ $\beta(s) \cap \beta(t)$ induziert einen zusammenhängenden Untergraphen in G
- ☐ $\beta(s) \cap \beta(t) = \emptyset$

Aufgabe 6

3 Punkte

Sei $\sigma := \{E, R, B\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist und R und B 1-stellige Relationssymbole sind.

(i) Betrachten Sie die FO[σ]-Formel $\varphi(x) := \exists y \left((B(y) \wedge E(y, x)) \vee \exists z (R(z) \wedge E(y, z) \wedge E(z, x)) \right)$.

Welches ist der kleinste Wert für r , für den φ r -lokal um x ist?

☐ 0☐ 1☒ 2☐ 3☐ Es gibt kein $r \in \mathbb{N}$, für das φ r -lokal ist.

(ii) Welche der folgenden FO[σ]-Formeln ist ein basis-lokaler Satz?

☒ $\exists x_1 \exists x_2 (\text{dist}(x_1, x_2) > 6 \wedge R(x_1) \wedge R(x_2))$ ☐ $\exists x_1 \exists x_2 (\text{dist}(x_1, x_2) > 7 \wedge B(x_1) \wedge B(x_2))$ ☐ $\exists x_1 \exists x_2 (\text{dist}(x_1, x_2) > 8 \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1))$

(iii) Welche Bedingung muss ein FO-Satz erfüllen, damit er in Gaifman-Normalform ist?

☐ Er muss r -lokal sein für alle $r \in \mathbb{N}$.☐ Er muss äquivalent zu einer r -lokalen Formel sein für ein $r \in \mathbb{N}$.☐ Er muss quantorenfrei sein.☐ Er muss genau zwei verschiedene Variablen verwenden.☒ Er muss eine Boole'sche Kombination basis-lokaler Sätze sein.

Aufgabe 7

2 Punkte

Sei $\sigma := \{f\}$, wobei f ein 2-stelliges Funktionssymbol ist.

(i) Welche der folgenden Formeln ist in $\text{MSO}[\sigma] \setminus \text{FO}[\sigma]$?

☐ $\exists x \forall y f(x, y) = x$

☒ $\exists X \forall y (X(y) \leftrightarrow \neg f(y, y) = y)$

☐ $\exists X \exists y \exists z (X(y, z) \leftrightarrow \neg f(y, z) = f(z, y))$

☐ $\exists X \exists y (X(y) \wedge f(y))$

(ii) Wir definieren die σ -Struktur $\mathcal{Z} := (\mathbb{Z}, f^{\mathcal{Z}})$, wobei $f^{\mathcal{Z}}$ die normale Addition ganzer Zahlen ist. Welche der folgenden $\text{MSO}[\sigma]$ -Formeln wird von $\mathcal{Z}$ erfüllt?

☐ $\forall y \forall x f(x, y) = f(x, f(x, y))$

☐ $\forall X \forall x \forall y (X(x) \wedge f(x, x) = y \rightarrow X(y))$

☐ $\exists X \left(\exists x X(x) \wedge \forall y ((\neg \exists z \exists w f(z, w) = y) \leftrightarrow X(y)) \right)$

☒ $\exists X \left(\exists x X(x) \wedge \forall y (f(y, y) = y \leftrightarrow X(y)) \right)$