

Beispiele für Klausurfragen

mpgi4@cg.tu-berlin.de

WiSe 2013/2014

Teil 1: Gleitkommazahlen

- Was versteht man unter numerischer Auslöschung? Bei welcher oder welchen arithmetischen Operationen tritt dieses Phänomen auf? Wann führt dieses Verhalten zu großen Fehlern?
- Warum ist der direkte Vergleich $x = y$ zweier Gleitkommazahlen x, y in der Regel nicht sinnvoll? Was ist eine praktikable Alternative?

Teil 2: Gauß-Elimination

- Beschreiben sie die grundlegenden Schritte, welche bei der Gauß-Elimination ausgeführt werden.
- Welche numerischen Probleme können bei der Lösung eines Gleichungssystems mit Gauß-Elimination auftreten? Wie lassen sich diese Probleme vermeiden?
- Gegeben sei das folgende Gleichungssystem. Führen sie die Gauß-Elimination durch. Geben sie jeden Schritt der äußeren Schleife an, die über den Spaltenindex läuft.
- Wie lässt sich mithilfe der Gauss-Elimination der numerische Rang einer Matrix bestimmen?
- Erläutern sie anhand des gegebenen 2×2 Gleichungssystems wie Pivoting funktioniert und warum es angewendet wird.

Teil 3: LR-Zerlegung

- Wie ist die LR-Zerlegung einer Matrix definiert?
- Wie kann ein Gleichungssystem $Ax = b$ mittels der LR-Zerlegung von A gelöst werden?
- Unter welchen Umständen ist es sinnvoll, die LR-Zerlegung zur Lösung eines Gleichungssystems zu verwenden? Wann genügt die Gauß-Elimination?

Teil 4: Cholesky Zerlegung

- Welche Bedingung muss eine Matrix erfüllen, damit man eine Cholesky Zerlegung durchführen kann?
- Wie ist die Cholesky Zerlegung einer Matrix definiert?

Teil 5: SVD

- Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Was versteht man unter der Singulärwertzerlegung (SVD) von A ?
- Was ist ein lineares Ausgleichsproblem? Wodurch ist die Lösung eines solchen Problems charakterisiert?

- c) Wie können lineare Ausgleichsprobleme mithilfe der SVD gelöst werden?
- d) Welche Verfahren für die Lösung linearer Ausgleichsprobleme kennen sie?
- e) Gegeben sind 50 Fotografien, auf welchen vergrößerte Gewebeproben aus der Biologie dargestellt sind. Jeweils 10 Bilder zeigen den selben Gewebetyp. Beschreiben sie mit Pseudo-Code ein Verfahren, mit dem man entscheiden kann, zu welchem der fünf Gewebetypen ein neues Bild gehört (nehmen sie an, dass ihnen alle Funktionen in numpy und scipy zur Verfügung stehen (es muss nicht die korrekte Syntax verwendet werden, aber die verwendete Funktionalität; stelle sie dies ggf. durch Kommentare sicher)).

Teil 6: Interpolation

- a) Geben sei eine Menge von N Stützstellen x_i und deren Funktionswerte y_i . Welche zwei Verfahren zur Bestimmung des Interpolationspolynoms $(N - 1)$ -ten Grades haben wir kennengelernt?
- b) Konstruieren Sie ein Gleichungssystem, welches die Koeffizienten eines Polynoms zweiten Grades bestimmt, dass drei vorgegebene Punkte $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, \dots, 3}$ interpoliert.
- c) Beschreiben Sie an einem geeigneten Beispiel das Runge Phänomen, welches bei der Polynom-Interpolation auftreten kann. Schlagen sie ein Verfahren vor, um das Problem zu vermeiden.
- d) Worin besteht die Grundidee der Splineinterpolation? Welches Problem der globalen Polynominterpolation löst diese?
- e) Geben sei einen Menge von Stützstellen x_i und Funktionswerte y_i . Gesucht ist ein stückweise, zweimal differenzierbarer kubischer Spline, welcher die Funktionswerte interpoliert. Erläutern sie, wie die Anforderung an die Differenzierbarkeit erfüllt wird. Geben Sie die Interpolationsmatrix für drei Paare (x_i, y_i) an.

Teil 7: Quadratur

- a) Wie kann man Interpolationsmethoden für numerische Quadratur verwenden?
- b) Geben seien Stützstellen $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, \dots, N - 1$, und Funktionswerte $f(x_i)$. Wie lauten die Mittelpunkregel und die Trapezregel zur Approximation des Integrals von $f(x)$ zwischen x_0 und x_{N-1} ?

Teil 8: Diskrete Fouriertransformation

- a) Wie ist die diskrete Fouriertransformation definiert?
- b) Welchen Wert hat das (i, j) -te Element der DFT Matrix? Welche Eigenschaften resultieren daraus für die DFT Matrix und warum sind diese in der Praxis nützlich?
- c) Erläutern sie den Ansatz, welcher zur Herleitung der schnellen Fouriertransformation verwendet wird.
- d) Wie groß ist die Zeit und Speicherkomplexität der schnellen Fouriertransformation?
- e) Wie geht man vor, um mithilfe der Fouriertransformation tiefe Frequenzen in einem Audiosignal, gegeben durch einen Vektor von Samples (oder Abtastwertes) $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, zu verstärken. Beschreiben sie dies mit Pseudocode und nehmen sie an, dass ihnen alle Funktionen in numpy und scipy zur Verfügung stehen (es muss nicht die korrekte Syntax verwendet werden, aber die verwendete Funktionalität; stelle sie dies ggf. durch Kommentare sicher).
- f) Wie lässt sich die Anwendung der Fouriertransformation auf einen Vektor geometrisch interpretieren? Rufen sie sich hierfür die Eigenschaften der DFT Matrix in Erinnerung. Wie verhält sich die Norm des Vektors dabei?

Teil 9: Newton

- a) Wie lautet die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren.
- b) Leiten sie die Iterationsvorschrift für das Newtonverfahren her. Welche Idee unterliegt dem Verfahren?
- c) Welche Vor- und Nachteile hat das Newton-Verfahren?

Teil 10: Gewöhnliche Differentialgleichungen

- a) Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = f(t, y(t))$ mit $y(t_0) = y_0$. Geben sie das explizite und implizite Euler-Verfahren für die Gleichung an. Welches Verfahren würden Sie verwenden und warum?
- b) Welche Arten von Fehlern, welche bei der numerischen Lösung von Anfangswertproblemen entstehen können, haben wir in der Vorlesung näher betrachtet?