Klausur

zur Vorlesung „Mathematik für Informatiker I“ WS 1999/00

Jürgen Gärtner \ Gunnar Schröter, René Dahms 23. 02. 2000

Name: .... **Vorname:** ....

Matrikelnummer: ....

Tutor: ....

Füllen Sie bitte zuerst den Kopf vollständig und leserlich aus. Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen.
Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
Am Ende der Klausur heften Sie Ihre Lösungen und Ihr Aufgabenblatt zusammen.
Als Hilfsmittel dürfen Sie - wie angekündigt - ein beidseitig handbeschriebenes Blatt der Größe DIN A4 benutzen. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
Mit 10 von 20 Punkten gilt die Klausur als bestanden.

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Bewertung:								

Punkte: .... Note: ....

Unterschrift des Korrektors: ....

Einsicht und einzige Reklamationsmöglichkeit: Mo., 28. 02., 10^{00} – 14^{00} im MA 441. Laufzettel mitbringen!

Aufgabe 1: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die n–te Iterierte f^n von f definiert durch:

$$f^n(x) := \begin{cases} x, & n = 0, \\ f(x), & n = 1, \\ (f \circ f^{n-1})(x), & n \geq 2\,. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie f^2 für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $f(x) = x(1-x)$.

(b) Zeigen Sie, daß f^n für alle $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ differenzierbar ist und daß die Ableitung gegeben ist durch

$$(f^n)'(x) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x))\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4 Punkte

Aufgabe 2: Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Differenzierbarkeit im Punkt $x_0 = 0$:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \sin(x), & x > 0. \end{cases}$

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{vermöge} \quad f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \exp(-x), & x > 0. \end{cases}$

3 Punkte

Aufgabe 3: Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung

$$\frac{|x-1|+2}{x-1} < -1\,.$$

2 Punkte

Aufgabe 4: Sei

$$z = \sqrt{2}\frac{1-i}{1+i}e^{i\frac{\pi}{4}}\,.$$

(a) Stellen Sie z in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

(b) Stellen Sie z in der Form $re^{i\varphi}$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ dar.

Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. **2 Punkte**

Aufgabe 5: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und Divergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(i+1)-1} - \frac{1}{n(i+1)+1} \right)$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(n+1)!}$.

3 Punkte

Aufgabe 6: Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} \frac{e^x \cos(\pi e^x)}{(\sin(\pi e^x))^3}\, dx$. Hinweis: Substituieren Sie $y = \sin(\pi e^x)$.

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x) e^x\, dx$. Hinweis: Mehrfache partielle Integration.

3 Punkte

Aufgabe 7: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\binom{n}{n-1} 4^n}\,.$$

3 Punkte