MafI 1 Klausur WS 03/04

Diese Klausur wurde von einigen Studenten während ihres Klausur-Termins abgeschrieben, um sie Dir zur Verfügung zu stellen. Natürlich können sich daher Fehler eingeschlichen haben – anstatt zu meckern, solltest du in diesem Fall einen freundlichen Hinweis an die u.g. Adresse schicken, damit wir das korrigieren können.
Damit die Klausursammlung aber immer aktuell bleibt, brauchen wir Deine Mithilfe! Wenn du in einer Klausur noch ein paar Minuten Zeit hast, schreibe doch ein paar Aufgaben ab, damit auch spätere Semester etwas davon haben. Schicke deine Aufschriebe an klausuren@freitagsrunde.org oder stelle sie selbst in unsere Klausursammlung unter http://wiki.freitagsrunde.org/Klausurensammlung.

Vielen Dank - Deine Freitagsrunde.

Insgesamt sind 20 Punkte erreichbar, zum Bestehen erforderlich sind 10 Punkte. Allerdings wurde die Bestehensgrenze von den Veranstaltern im WS 03/04 auf 8 Punkte abgesenkt.

Aufgabe 1 (1 + 2 Punkte)

(a) Untersuchen sie die folgende Reihe auf Konvergenz bzw Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n \cos(\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$$

(b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2^n-3)\, n!}{n^{n-1}} x$$

konvergiert bzw divergiert.

Aufgabe 2 (1,5 + 1,5 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1-\cos(x)}{3x^2}, & falls\ x \neq \\ 0, & falls\ x = (\end{cases}$$

(a) Untersuchen Sie, in welchen Punkten die Funktion f stetig ist.
(b) Bestimmen Sie alle Punkte in denen f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte):

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 e^{-x} dx$ (b) $\int_0^1 \frac{(\arctan x)^2}{1+x^2} e^{-\arctan x}$

Hinweis zu (b): substituieren Sie nach $t=\arctan$

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Finden Sie alle $x \in \mathbb{R},$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{3}{|7-x|} > \frac{1}{x-2}$$

Aufgabe 5 (1,5 + 1,5 Punkte)

Sei

$$z := \sqrt{2} \frac{1-i}{1+i} e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

(a) Stellen Sie z in der Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

(b) Stellen Sie z in der Form $r\, e^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi]$ dar.

Hinweis: $\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $\cos\frac{3}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Aufgabe 6 (2 + 1 Punkte)

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_0 \in \left[\frac{3}{2}, 4\right]$ und

$$x_{n+1} = 1 + \frac{2}{x_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(a) Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{N},$ gelten die Aussagen:

$$x_n \in \left[\frac{3}{2}, 4\right] \quad \text{und} \quad |x_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3} |x_n - 2|$$

(b) Konvergiert die Folge (x_n)? Berechnen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass $f(x) := x^5 - 2x^3 -$ mindestens eine reelle Nullstelle im Intervall $[0, 2]$ besitzt.

Hinweis: Es ist nicht nötig, diese Nullstelle zu berechnen.