Nachklausur

zur Vorlesung „Mathematik für Informatiker II“ SS 2000

Jürgen Gärtner / Till Tantau, René Dahms 09. 10. 2000

Name: .... **Vorname:** ....

Matrikelnummer: ....

Tutor: ....

Füllen Sie bitte zuerst den Kopf vollständig und leserlich aus. Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen.
Benutzen Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
Als Hilfsmittel dürfen Sie – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes Blatt der Größe DIN A4 benutzen. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.
Mit 10 von 20 Punkten gilt die Klausur als bestanden.

	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Bewertung:							

Punkte: .... Note: ....

Unterschrift des Korrektors: ....

Einsicht und einzige Reklamationsmöglichkeit: Do., 12. 10., 9^{00} - 13^{00} im MA 749.

Aufgabe 1: Geben Sie **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt und für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.
Wichtig: Verwenden Sie nur die Worte „**wahr**" und „**falsch**"!

(a) Für alle (n,n)–Matrizen A, B gilt $\det(A+B) = \det A + \det B$.

(b) Seien $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zwei lineare Abbildungen. Dann ist auch $f \circ g$ linear.

(c) Sei A eine (n,n)–Matrix mit $\det A = 0$. Dann hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ die Gleichung $Ax = b$ unendlich viele Lösungen.

(d) Seien a, b zwei linear unabhängige Vektoren des $\mathbb{R}^2$. Dann sind a und b orthogonal, d.h. $a \cdot b = 0$.

(e) Seien U, V zwei $\mathbb{R}$–Vektorräume. Dann ist auch $U \cup V$ ein $\mathbb{R}$–Vektorraum.

(f) Seien A eine (m,n)–Matrix, $\operatorname{rang} A$ der Rang von A und $\operatorname{Kern} A := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$ der Kern von A. Dann gilt: $\dim(\operatorname{Kern} A) + \operatorname{rang} A = n$.

3 Punkte

Aufgabe 2: Seien $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ und A eine reguläre (n,n)–Matrix. Beweisen Sie, daß dann auch $Av_1, \ldots, Av_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

3 Punkte

Aufgabe 3: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ seien

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, für die die Gleichung $Ax = b$ keine, genau eine bzw. unendlich viele Lösungen besitzt.

b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ den Kern von A, d.h. die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\}$.

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\lambda \in \mathbb{R}$ den Rang von A.

4 Punkte

Aufgabe 4: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Determinante von A.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußverfahrens die Inverse von A und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

c) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von A.

3 Punkte

Aufgabe 5:

Im $\mathbb{R}^3$ seien die Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, daß diese drei Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

b) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E, die alle drei Punkte enthält.

c) Bestimmen Sie einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf E steht.

d) Berechnen Sie den Abstand der Ebene E vom Nullpunkt.

4 Punkte

Aufgabe 6: Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $f_1, f_2, f_3 \in C(\mathbb{R})$ linear unabhängig sind:

$$f_1(x) = e^x, \quad f_2(x) = \frac{\pi}{2} - x \quad \text{und} \quad f_3(x) = \cos(x).$$

3 Punkte