Institut für Mathematik
Sommersemester 2015
Martin Slowik

Technische Universität Berlin

1. Klausur zur „Mathematik II für Ökonomen"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Als Hilfsmittel ist nur ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner zugelassen!**
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Geben Sie bitte alle beschriebenen Blätter, inklusive Ihrer Schmierzettel und Ihres Formelblattes ab.
- Für die Bearbeitung der Klausur haben Sie 100 Minuten Zeit.
- Geben Sie immer einen vollständigen und kommentierten Rechenweg an!
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Nicht angemeldete Klausuren können nicht korrigiert werden!
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	**Summe**	**Note**
Punkte						

1. (Integration von Funktionen) *[25 Pkt]*

a) Was sagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus?

Seien F, G zwei verschiedene Stammfunktionen von f. Was wissen Sie über die Ableitung der Funktion $H = F - G$? (kurze Begründung)

Geben Sie ein stetige Funktion an (ohne Begründung), die nicht identisch Null ist, deren Integral über das Intervall $[-1, 1]$ aber gleich Null ist.

b) Bestimmen Sie die folgenden Stammfunktionen mittels geeigneter Substitution oder partieller Integration.

i) $$\int x^2 \cdot \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$$ ii) $$\int 2x \sin(x^2)\, \mathrm{d}x$$

c) Berechnen Sie die folgenden Integrale mittels geeigneter Substitution oder partieller Integration.

i) $$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, \mathrm{d}x$$ ii) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\, \mathrm{d}x$$

2. (Differentialgleichungen) *[25 Pkt]*

a) Was versteht man einer homogenen bzw. inhomogenen, linearen Differentialgleichung erster Ordnung (Definition).

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$, wobei die Funktion g nicht identisch Null ist. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion h an (ohne Begründung), so dass

i) die Funktion h nicht identisch Null ist und

ii) die Funktion $y\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = 0$ für alle $x \in I$ eine Lösung der DGL $y' = g(x)h(y)$ ist.

b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{1}{x^2 + 8x + 15}.$$

c) Betrachten Sie nun das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{2y}{x^2 + 8x + 15}, \qquad y(0) = \frac{3}{5}.$$

Um welche Art von Differentialgleichung handelt es sich in diesem Beispiel.

Bestimmen Sie die Lösung $y\colon [0, \infty) \to (0, \infty)$ dieses Anfangswertproblems.

3. (Lineare Unabhängigkeit und Skalarprodukt) *[25 Pkt]*

a) Was versteht man unter der lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$.

Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei linear unabhängige Vektoren. Finden Sie ein Beispiel für eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ (ohne Begründung), so dass die Vektoren

$$\vec{w}_1 = A \cdot \vec{v}_1 \qquad \text{und} \qquad \vec{w}_2 = A \cdot \vec{v}_2$$

ebenfalls linear unabhängig sind.

b) Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$

$$\vec{v}_1 = (1, 2, 0, 3), \qquad \vec{v}_2 = (3, 1, -5, 4), \qquad \vec{v}_3 = (-1, 1, 4, 0).$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

Welche Dimension hat der Untervektorraum $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$?

c) Betrachten Sie nun die Vektoren $\vec{w}_i$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$, die gegeben sind durch

$$\vec{w}_1 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{w}_2 = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{w}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3, \quad \vec{w}_4 = \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ linear abhängig sind.

Hinweis: Der Gaußalgorithmus wie auch Determinanten sind zur Lösung dieser Aufgabe nicht notwendig!

d) Berechnen Sie das Skalarprodukt $(\vec{v}_1 + \vec{e}_1) \cdot \vec{v}_3$ sowie jeweils den Betrag der Vektoren $\vec{v}_1 + \vec{e}_1$ und $\vec{v}_3$, wobei mit $\vec{e}_1, \dots \vec{e}_4$ die Vektoren der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^4$ bezeichnet werden.

Bestimmen Sie anschließend den Winkel zwischen $\vec{v}_1 + \vec{e}_1$ und $\vec{v}_3$.

4. (Matrizen) *[25 Pkt]*

Gegeben seien für $t \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Matrizen

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & t \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_t = \begin{bmatrix} 2-2t & 2t & -2 \\ 2t & -t & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Was versteht man unter dem Rang einer Matrix (Definition).

Geben Sie ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ an.

Geben Sie ein Beispiel für zwei Matrizen $C, D \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ an (ohne Begründung), die die Eigenschaft haben, dass

$$\operatorname{rang} C = \operatorname{rang} D = 1 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rang}(C \cdot D) = 0.$$

b) Bestimmen Sie den Rang der Matrix A_t in Abhängigkeit von t.

Für welche Werte t ist die Matrix A_t invertierbar?

c) Berechnen Sie das Matrixprodukt $A_t \cdot B_t$.

d) Bestimmen Sie für $t = 0$ und $\vec{b} = (0, 1, 2)$ die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A_{t=0} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$