Institut für Mathematik
Sommersemester 2015
Martin Slowik

1. Klausur zur „Mathematik II für Ökonomen"

Lösungen

---

1. (Integration von Funktionen) *[25 Pkt]*

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist die Aussage des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; F(b) \;-\; F(a).$$

Seien F, G zwei verschiedene Stammfunktionen von f. Dann ist $H = F - G$ eine Konstante. Folglich ist $H'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Betrachte als Beispiel die Funktion $f(x) = x$. Dann gilt

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{2}\,x^2\,\Big|_{-1}^{1} \;=\; 0.$$

b) i) Gegeben sei die Funktion $f_1(x) = x^2 \mathrm{e}^{2x}$. Durch partielle Integration ergibt sich für eine Stammfunktion von f_1

$$\begin{aligned}\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \left(\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{e}^{2x} - \left(\frac{1}{2}\,x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{2x}\right) + c \;=\; \frac{1}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{2x} + c.\end{aligned}$$

ii) Gegeben sei die Funktion $f_2(x) = 2x\sin(x^2)$. Zur Berechnung einer Stammfunktion von f_2 betrachte die Substitution

$$z \;=\; x^2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}z \;=\; 2x\,\mathrm{d}x.$$

Dann gilt

$$\int 2x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x \;=\; \int \sin(z)\,\mathrm{d}z \;=\; -\cos(z) + c \;=\; -\cos(x^2) + c.$$

c) i) Gegeben sei die Funktion $g_1(x) = x/\sqrt{4 - x^2}$. Zur Berechnung des Integrals der Funktion g_1 über dem Intervall $[0, 2]$ betrachte die Substitution

$$z \;=\; 4 - x^2 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{d}z \;=\; -2x\,\mathrm{d}x \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}z \;=\; x\,\mathrm{d}x.$$

Damit ergibt sich dann

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{a\nearrow 2}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{a\nearrow 2}\frac{1}{2}\int_{4-a^2}^4 \frac{1}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$$

$$= \lim_{a\nearrow 2}\frac{2\sqrt{z}}{2}\Big|_{4-a^2}^4 \;=\; \lim_{a\nearrow 2}\left(2-\sqrt{4-a^2}\right) \;=\; 2.$$

ii) Gegeben sei die Funktion $g_2(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$. Im folgenden soll zunächst eine Stammfunktion von g_2 mittels partieller Integration bestimmt werden. Dabei gilt

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot \ln x\,\mathrm{d}x \;=\; 2\sqrt{x}\,\ln x \;-\; 2\int \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; 2\sqrt{x}\,\ln x \;-\; 4\sqrt{x} \;+\; c.$$

Somit ergibt sich für das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{a\searrow 0}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{a\searrow 0}\left(-4-2\sqrt{a}\,\ln a+4\sqrt{a}\right) \;=\; -4.$$

Hierbei wurde im letzten Schritt zur Bestimmung des Grenzwertes der Satz von de l'Hospital benutzt, wobei

$$\lim_{a\searrow 0}\sqrt{a}\,\ln a \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{a\searrow 0}\frac{\ln a}{a^{-1/2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{a\searrow 0}\frac{a^{-1}}{-(1/2)a^{-3/2}} \;=\; \lim_{a\searrow 0} -2\sqrt{a} \;=\; 0.$$

2. (Differentialgleichungen) *[25 Pkt]*

a) Seien $a, b\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Falls b nicht identisch Null ist, so nennt man

$$y' \;=\; a(x)\, y + b(x)$$

eine inhomogenen, lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Im Falle $b(x) = 0$ für alle $x \in I$ spricht man von einer homogenen, linearen Differentialgleichung erster Ordnung.

Die Funktion $y(x) = 0$ für alle $x \in I$ ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(x)h(y)$, wenn $h(0) = 0$ ist. Dies ist beispielweise für die Funktion $h(y) = y$ der Fall.

b) Gegeben sei die rationalen Funktion $r(x) = 1/(x^2 + 8x + 15)$. In einem ersten Schritt soll die Linearfaktorzerlegung des Nennerpolynoms bestimmt werden. Da die Nullstellen des Nennerpolynoms gegeben sind durch

$$0 \;=\; x^2 + 8x + 15 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_{1/2} \;=\; -4 \pm 1,$$

ergibt sich folglich $x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$. Zur Bestimmung der Partialbruchzerlegung von r betrachte nun

$$r(x) \;=\; \frac{1}{(x+3)(x+5)} \;=\; \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+5},$$

wobei die Konstanten a und b gegeben sind durch

$$a \;=\; (x+3)\, r(x)\Big|_{x=-3} \;=\; \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad b \;=\; (x+5)\, r(x)\Big|_{x=-5} \;=\; -\frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$r(x) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5}\right).$$

c) Im folgenden soll nun das Anfangswertproblem

$$y' \;=\; \frac{2y}{x^2 + 8x + 15}, \qquad y(0) = \frac{3}{5}$$

betrachtet werden. Hierbei handelt es sich um eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen mit

$$g(x) \;=\; \frac{2}{x^2 + 8x + 15} \;=\; \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+5} \qquad \text{und} \qquad h(y) \;=\; y.$$

Zusammen mit der Anfangsbedingung ergibt sich daher

$$G(x) \;=\; \int_0^x g(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_0^x \frac{1}{z+3} - \frac{1}{z+5}\,\mathrm{d}z \;=\; \ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right| - \ln(3/5)$$

$$H(y) \;=\; \int_{3/5}^y \frac{1}{h(z)}\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{3/5}^y \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z \;=\; \ln|y| - \ln(3/5).$$

Aus dem Satz über die Trennung der Variablen folgt nun aber, dass die gesuchte Lösung $y\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ des gegebenen Anfangswertproblems der Beziehung $H\big(y(x)\big) = G(x)$ genügt, d.h.

$$\ln y(x) - \ln(3/5) \;=\; \ln\frac{x+3}{x+5} - \ln(3/5) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y(x) \;=\; \frac{x+3}{x+5}.$$

3. (Lineare Unabhängigkeit und Skalarprodukt) *[25 Pkt]*

a) Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sind linear unabhängig, falls aus

$$\vec{0} \;=\; \lambda_1 \vec{v}_1 \;+\; \lambda_2 \vec{v}_2 \;+\; \ldots \;+\; \lambda_n \vec{v}_n$$

folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$ ist.

Seien $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei linear unabhängige Vektoren und $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Falls die Matrix A vollen Rang hat, d.h. $\operatorname{rang} A = 2$, so sind die Vektoren $\vec{w}_1 = A \cdot \vec{v}_1$ und $\vec{w}_2 = A \cdot \vec{v}_2$ linear unabhängig. Dies ist beispielweise der Fall für die Matrix

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Gegeben seien die folgenden Vektoren

$$\vec{v}_1 \;=\; (1,2,0,3), \qquad \vec{v}_2 \;=\; (3,1,-5,4), \qquad \vec{v}_3 \;=\; (-1,1,4,0).$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig, falls aus

$$\vec{0} \;=\; \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$$

folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung ist. Dazu genügt es das folgende homogene lineare Gleichungssystem zu betrachten

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{\text{II}-2\cdot\text{I} \\ \text{IV}-3\cdot\text{I}}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{\text{III}-\text{II} \\ \text{IV}-\text{II}}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{array},$$

d.h. die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ sind linear unabhängig.

Für die Dimesnsion des Untervektorraumes $U = \operatorname{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ gilt daher, dass $\dim U = 3$.

c) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{w}_1 \;=\; 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{w}_2 \;=\; \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{w}_3 \;=\; \vec{v}_1 - \vec{v}_3, \quad \vec{w}_4 \;=\; \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3.$$

Da die Anzahl der gegebenen Vektoren größer als die Dimension des Untervektorraumes U, d.h. $4 > \dim U = 3$, sind folglich die Vektoren $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4$ linear abhängig.

d) Es gilt

$$(\vec{v}_1 + \vec{e}_1) \cdot \vec{v}_3 \;=\; (2,2,0,3) \cdot (-1,1,4,0) \;=\; 0.$$

Weiterhin ist der Betrag der Vektoren $\vec{v}_1 + \vec{e}_1$ und $\vec{v}_3$ gegeben durch

$$\|\vec{v}_1 + \vec{e}_1\| \;=\; \sqrt{(\vec{v}_1 + \vec{e}_1) \cdot (\vec{v}_1 + \vec{e}_1)} \;=\; \sqrt{17} \quad \text{und} \quad \|\vec{v}_3\| \;=\; \sqrt{\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_3} \;=\; \sqrt{18}.$$

Somit ergibt sich für den Winkel α zwischen $\vec{v}_1 + \vec{e}_1$ und $\vec{v}_3$

$$\cos\alpha \;=\; \frac{(\vec{v}_1 + \vec{e}_1) \cdot \vec{v}_3}{\|\vec{v}_1 + \vec{e}_1\| \, \|\vec{v}_3\|} \;=\; 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha \;=\; \frac{\pi}{2}.$$

4. (Matrizen) *[25 Pkt]*

Gegeben seien für $t \in \mathbb{R}$ die folgenden beiden Matrizen

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & t \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad B_t = \begin{bmatrix} 2-2t & 2t & -2 \\ 2t & -t & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Unter dem Rang einer Matrix versteht man die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren.

Lösungsweg 1: Eine Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn die Matrix B vollen Rang hat, d.h. $\operatorname{rang} B = n$.

Lösungsweg 2: Eine Matrix $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det B \neq 0$ ist.

Seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ zwei orthogonale Vektoren. Betrachte als Beispiel

$$C = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & w_1 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}.$$

Dann besitzen die Matrizen C und D jeweils den Rang 1, während

$$\operatorname{rang}(C \cdot D) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & \vec{v} \cdot \vec{w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

b) Im folgenden soll der Rang der Matrix A_t in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ bestimmt werden. Da

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & t \end{bmatrix} \overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & t \end{bmatrix} \overset{\text{III}+\text{II}}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1+t \end{bmatrix}$$

und der Rang einer Matrix gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Zeilen nach Transformation auf Zeilenstufenform ist, folgt somit

$$\operatorname{rang} A_t = \begin{cases} 3, & t \neq -1, \\ 2, & t = -1. \end{cases}$$

Die Matrix A_t hat für alle $t \neq -1$ vollen Rang und ist somit für alle $t \neq -1$, insbesondere für $t = 0$, invertierbar.

c) Im folgenden soll das Matrixprodukt $A_t \cdot B_t$ berechnet werden

$$A_t \cdot B_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-2t & 2t & -2 \\ 2t & -t & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2t & 0 & 0 \\ 0 & 2+2t & 0 \\ 0 & 0 & 2+2t \end{bmatrix}.$$

d) Da $\operatorname{rang} A_{t=0} = 3$, besitzt somit das lineare Gleichungssystem $A_{t=0} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eine eindeutige Lösung.

Lösungsweg 1: Diese ist gegeben durch

$$A_{t=0} \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\text{III}+\text{II}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} = (-2, 1, 3).$$

Lösungsweg 2: Aus Aufgabenteil c) folgt, dass

$$\left(A_{t=0}\right)^{-1} \;=\; \frac{1}{2}\left(B_{t=0}\right) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Somit ergibt sich für die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$A_{t=0} \cdot \vec{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{x} \;=\; \left(A_{t=0}\right)^{-1} \cdot \vec{b} \;=\; \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$