A

Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. G. dos Reis

Sommersemester 2011
27. Juli 2011

Klausur
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind, bis auf einen nicht-programmierbaren Taschenrechner und Stifte, keine Hilfsmittel zugelassen. Handys sind auch verboten!

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel, ab!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 25 von 50 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ

1. Aufgabe

4 Punkte

Berechnen Sie das folgende Matrix-Vektor- und Matrix-Matrix-Produkt

$$(\mathbf{a}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad (\mathbf{b}) \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Aufgabe

6 Punkte

(a) Geben Sie die Determinanten und Rang der folgenden Matrizen an:

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 21 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(b) Benutzen Sie die Cramersche Regel um die dritte Komponente der Lösung x von $Ax = b$ zu berechnen, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

3. Aufgabe

8 Punkte

(a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

in Matrixform $Ax = b$ dar. Bestimmen Sie sodann die Lösung des Gleichungssystems mithilfe der Inversen A^{-1} von A, d. h. berechnen Sie A^{-1} und $x = A^{-1}b$.

(b) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

in Matrixform $Ax = b$ dar. Berechnen Sie dann die Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahrens.

4. Aufgabe

5 Punkte

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } F(x) &= 6x_1 + 12x_2 + x_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ 2x_1 + 4x_3 &\leq 24 \\ x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die Normalform des LOPs über Einführung von Schlupfvariablen.

(b) Schreiben Sie das Tableau für den Simplex-Algorithmus auf. (Nach einer Lösung des LOPs ist in dieser Aufgabe nicht gefragt!)

(c) Ist die aktuelle Basislösung zum Tableau aus Teil **(b)** zulässig? Würden Sie zunächst den primalen oder den dualen Simplex-Algorithmus anwenden, um die optimale Lösung zu finden?

5. Aufgabe 7 Punkte

Finden Sie die optimale Lösung des folgenden LOPs:

Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
x_3	-1	-1	1	0	0	-8
x_4	-5	-1	0	1	0	-12
x_5	1	1	0	0	1	13
c	$-1/2$	-1	0	0	0	0

Bitte markieren Sie in jedem Tableau die jeweilige Pivotzeile und -spalte!

(a) Bestimmen Sie mit dem dualen Simplex-Algorithmus eine zulässige Lösung des LOPs.

(b) Fahren Sie anschließend mit den primalen Simplex-Algorithmus fort, um die optimale Lösung zu finden.

(c) Geben Sie die optimale Lösung x^* und den zugehörigen maximalen Wert $F(x^*)$ an.

6. Aufgabe 3 Punkte

Ein Unternehmen stellt kleine Büsten des Fußballspielers Cristiano Ronaldo her. Die zugehörige Grenzkostenfunktion hat die Form $K'(x) = 6 - 0.06x^2$ und die Fixkosten betragen $K(0) = 52$ (für $x \geq 0$).

(a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion $K(x)$.

(b) Wie hoch sind die Kosten für die Herstellung von zehn Büsten des Fußballspielers?

7. Aufgabe 5 Punkte

Gegeben seien folgende Nachfragefunktion f und Angebotsfunktion g:

$$f(Q) = \frac{16}{Q+1}, \qquad g(Q) = 1 + Q, \qquad \text{wobei } Q \geq 0.$$

(a) Berechnen Sie den Gleichgewichtspunkt (Q^*, P^*);

(b) die Produzentenrente (PS);

(c) die Konsumentenrente (CS), d. h. berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$CS = \int_0^{Q^*} [f(q) - P^*]dq, \quad \text{und} \quad PS = \int_0^{Q^*} [P^* - g(q)]dq.$$

8. Aufgabe 5 Punkte

(a) Bestimmen Sie das folgende Integral mit partieller Integration:

$$\int xe^{2x}\, dx.$$

(b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die gefundene Stammfunktion ableiten.

9. Aufgabe 7 Punkte

Berechnen Sie die Lösung $p(t)$ der folgenden Differentialgleichung:

$$p'(t) - 2p(t) = \frac{3}{1+t}\, e^{2t}, \quad p(0) = 2 \quad \text{und} \quad t \geq 0.$$