Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. G. Nunes dos Reis

Klausur

Sommersemester 2012
25. Juli 2012

Klausur
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind, bis auf einen nicht-programmierbaren Taschenrechner und Stifte. Keine Hilfsmittel sind zugelassen. Handys sind auch verboten! *Eine Zuwiderhandlung ist ein Betrugsversuch.*

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel, ab!

Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

Korrektur

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte	16	10	9	16	18	11	20	100
Wo ist die Antwort?								—
Note								
Unterschrift								—

Klausur Notenschlüssel

"100er Mathe Economics"		
1.0	98-100	Sehr gut
1.3	93-97	
1.7	87-92	Gut
2.0	81-86	
2.3	75-80	
2.7	70-74	Befriedigend
3.0	65-69	
3.3	59-64	
3.7	53-58	Ausreichend
4.0	50-52	
5.0	00-49	Mangelhaft

Aufgabe 1: Lineare Algebra - Teil I (16 Punkte)

Betrachten Sie folgendes LGS, wobei γ eine Konstante ist:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -2 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 2 \\ -8x_1 + 2x_2 + \gamma x_3 &= 10. \end{aligned}$$

1.a) Stellen Sie das LGS in Matrix-Form dar, d.h. in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$.

1.b) Sei $\gamma = 0$. Berechnen Sie das Produkt $\vec{b}^T A$.

1.c) Sei $\gamma = -13$. Berechnen Sie dann die Lösung des Gleichungssystems mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren. *Bringen Sie die Matrix mindestens zur oberen Dreiecksform.*

1.d) Betrachten Sie das ursprüngliche LGS in dem die Konstante γ unbekannt ist.

1.d)-1) Wählen Sie γ so, dass die Cramer'sche Regel *nicht* anwendbar ist um die Lösung des LGS zu berechnen. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

1.d)-2) Hat die Matrix A mit dem von Ihnen gewählten γ vollen Rang, d.h. ist $\operatorname{rang}(A) = 3$? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Lösung von Aufgabe 1: 2+2+5+5+2

1.a)

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \\ -8 & 2 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

1.b)

$$\vec{b}^T A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 4 \\ -8 & 2 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -82 & 28 & 0 \end{bmatrix}$$

1.c) Gauß: $\vec{x}^T = \begin{bmatrix} -8 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

1.d) γ ist wieder eine unbekannt.

1.d)-1) γ so dass $\det(A) = 0$. $\gamma = -12$

1.d)-2) $\det(A) = 0 \Rightarrow A$ ist nicht Vollrang.

Aufgabe 2: Lineare Algebra - Teil II (10 Punkte)

Betrachten Sie das LGS

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

2.a) Berechnen Sie die Lösung des Systems mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

2.b) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A (durch das Gauß-Verfahren).

2.c) Benutzen Sie die Inverse A^{-1} um x_1 und x_2 zu bestimmen. Geben Sie Zwischenrechnungen an.

Lösung von Aufgabe 2: 3+4+3

2.a) $\det(A) = 8 - 6 = 2$, $\det(A^1) = 12 + 2 = 14$, $\det(A^2) = -4 - 18 = -22$. Also

$$x_1 = \frac{\det(A^1)}{\det(A)} = \frac{14}{2} = 7, \qquad x_2 = \frac{\det(A^2)}{\det(A)} = \frac{-22}{2} = -11.$$

2.b)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.c)

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -11 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3: Simplex-Algorithmus - Teil I (9 Punkte)

Gegeben ist folgendes Lineares Optimierungsproblem, wobei β eine unbekannte Konstante ist:

$$\begin{aligned} \text{Maximiere } F(x) &= -6x_1 + 14x_2 + 4x_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ 4x_1 + 6x_3 &\leq 28 \\ -4x_1 - \beta\, x_2 &\geq 9 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.a) Bestimmen Sie die Normalform des obigen LOPs nach Einführung von Schlupfvariablen.

3.b) Schreiben Sie das Tableau für den Simplex-Algorithmus in die leere Vorlage. (Nach einer Lösung des LOPs ist in dieser Aufgabe nicht gefragt!)

Basis		b
$-c$		

3.c) Es ist offensichtlich, dass die aktuelle Basislösung zum Tableau aus Teil 3.b) nicht zulässig ist und man daher den Dualen Simplex anwenden muss.

Wählen Sie einen Wert für die Konstante β so, dass der Duale Simplex abbricht, d.h. es für das gewählte β nicht möglich ist, eine zulässige Basislösung mit dem Dualen Simplex zu finden. Geben Sie eine kurze Begründung!

Lösung von Aufgabe 3: 4+ 3 +2

3.a)

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} F(x) &= -6x_1 + 14x_2 + 4x_3 \\ \text{unter den Nebenbedingungen} & \\ 4x_1 + 6x_3 + y_1 &= 28 \\ +4x_1 + \beta\, x_2 + y_2 &= -9 \\ x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

3.b)

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	b
y_1	4	0	6	1	0	28
y_2	4	β	0	0	1	-9
$-c$	6	-14	-4	0	0	0

3.c) Für ein beliebiges $\beta \geq 0$, gibt es ein Abbruch in S2. "Wenn alle Einträge der Pivot-Zeile nichtnegativ sind, dann gibt es keine zulässige Lösung".

Aufgabe 4: Simplex-Algorithmus - Teil II (16 Punkte)

Bestimmen Sie für das unten angegebene LOP die optimale Lösung x^* und den maximalen Wert der Zielfunktion $F(x^*)$ mit dem Simplex-Algorithmus.

Nutzen Sie dazu die leeren Tableaus und markieren Sie die jeweilige Pivotzeile und -spalte! Kreuzen Sie zwischen den Tableaus an, welchen Algorithmus Sie benutzen.

Hinweis: Es ist möglich, dass Sie nicht alle drei Tableaus benötigen. Sie sollten aber keinesfalls mehr Schritte brauchen.

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
y_1	1	0	-1	1	0	0	200
y_2	3	2	0	0	1	0	525
y_3	-1	-1	0	0	0	1	-150
$-c$	-4	-2	0	0	0	0	0

↓ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ☐? (bitte markieren)

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
$-c$							

↓ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ☐? (bitte markieren)

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
$-c$							

↓ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ☐? (bitte markieren)

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
$-c$							

Ihre Lösung:

$$F(x^*) = \underline{\hspace{4cm}}$$

$$x* = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \Big(\quad , \quad , \quad , \quad , \quad , \quad \Big)$$

Lösung von Aufgabe 4: 6+6+4

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
y_1	1	0	−1	1	0	0	200
y_2	3	2	0	0	1	0	525
y_3	$\boxed{-1}$	−1	0	0	0	1	−150
$-c$	−4	−2	0	0	0	0	0

↓ Dual

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
y_1	0	−1	−1	1	0	1	50
y_2	0	−1	0	0	1	$\boxed{3}$	75
x_1	1	1	0	0	0	−1	150
$-c$	0	2	0	0	0	−4	600

↓ Primal

Basis	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	b
y_1	0	−2/3	−1	1	−1/3	0	25
y_3	0	−1/3	0	0	1/3	1	25
x_1	1	2/3	0	0	1/3	0	175
$-c$	0	2/3	0	0	4/3	0	700

1-mal Dual, 1-mal Primal und Antwort

$$F(x^*) = 700, \qquad x^* = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = (175, 0, 0, 25, 0, 25)$$

Aufgabe 5: Integration - Teil I (18 Punkte)

5.a) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ die Funktion $F(x) = x\ln(x) - x + K$ (mit K konstant) eine Stammfunktion von $f(x) = \ln(x)$ ist.

5.b) Berechnen Sie das Integral:

$$\int \frac{56}{(7t+1)^2} dt$$

5.c) Berechnen Sie mit partieller Integration:

$$\int t^2 e^{2t} dt$$

5.d) Berechnen Sie das folgende Integral, indem Sie $u = 1+(3x+4)^{\frac{1}{2}}$ substituieren und 5.a) benutzen:

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \ln\left(1 + (3x+4)^{\frac{1}{2}}\right) dx.$$

Lösung von Aufgabe 5: 2+5+6+5

5.a) Ableitung berechnen, Ziel: $F'(x) = f(x)$

$$\Big(x\ln(x) - x\Big)' = \ln(x) + x\frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

5.b)

$$\int \frac{56}{(7t+1)^2}dt = 56\int (7t+1)^{-2}dt = \frac{56}{-7}(7t+1)^{-1} = -8(7t+1)^{-1} + K$$

5.c)

$$\int t^2e^{2t}dt = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - \left(\int te^{2t}dt\right) = \frac{1}{2}t^2e^{2t} - \left(\frac{1}{2}te^{2t} - \int \frac{1}{2}e^{2t}dt\right) = e^{2t}\frac{1}{2}(t^2 - t + \frac{1}{2}) + K$$

5.d) Für $u = 1 + (3x+4)^{\frac{1}{2}}$ ist $du = 3\frac{1}{2}(3x+4)^{-\frac{1}{2}}dx$. Also fählt die $\frac{3}{2}$.

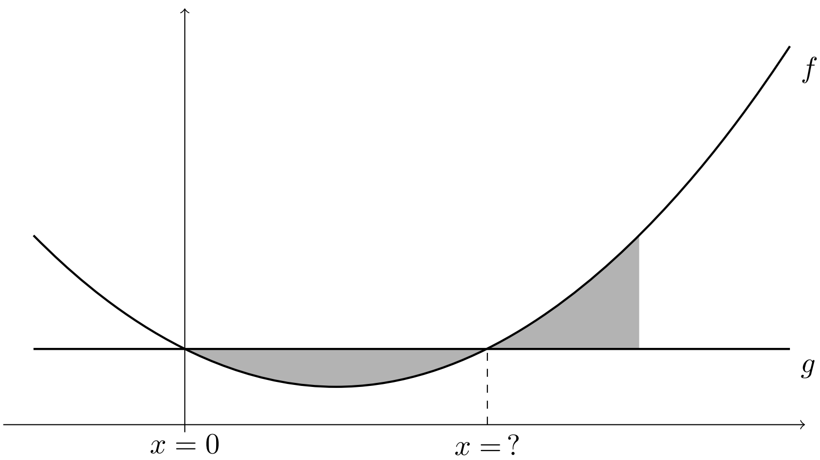
$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt{3x+4}} \ln\left(1 + (3x+4)^{\frac{1}{2}}\right)dx \overset{u=1+(3x+4)^{\frac{1}{2}}}{=} \int_3^6 \frac{2}{3}\ln(u)du \overset{5.a)}{=} \frac{2}{3}\Big[u\ln(u) - u\Big]_{u=3}^{u=6}$$
$$= 2\big(\ln 12 - 1\big) \approx 2{,}9699$$

wo für $x = 0$ gilt $u = 1 + \sqrt{4} = 3$ und für $x = 7$ gilt $u = 1 + \sqrt{21+4} = 6$.

Aufgabe 6: Integration - Teil II (11 Punkte)

6.a) Gegeben seien $f(x) = x^2 - 2x + 2$ und $g(x) = 2$. Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und dem Graphen der Funktion g im Intervall $[0, 4]$.

Folgende Skizze kann helfen (nicht maßstabsgetreu):



6.b) Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse im Intervall $[0, 100]$, wobei

$$f(x) = \begin{cases} x & , x \in [0,1] \\ e^{1-x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

Lösung von Aufgabe 6: 6+(2+3)

6.a)

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ und } x = 2.$$
$$\int_0^4 |f(x) - g(x)|dx = |\int_0^2 f(x) - g(x)dx| + |\int_2^4 f(x) - g(x)dx| = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$$

6.b)

$$\int_0^{100} f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^{100} e^{1-x}dx = \Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{x=0}^{x=1} + -\Big[e^{1-x}\Big]_{x=1}^{x=100} = \frac{1}{2} - \left(e^{-99} - e^0\right) \approx \frac{1}{2} + 1$$

Aufgabe 7: Differentialgleichungen **(20 Punkte)**

7.a) Gegeben sei die folgende DGL:

$$f' - f \cdot \frac{3}{t+1} = 0, \qquad f(0) = 5, \quad t \geq 0.$$

- Füllen Sie (mit "Ja" oder "Nein") die Tabelle aus:

Ist die DGL...	...linear?	...separabel?	...homogen?
Antwort			

- Berechnen Sie die Lösung der DGL.

7.b) Betrachten Sie folgende DGL:

$$y' = \frac{2x}{e^y}, \qquad y(0) = 1, \quad x \geq 0.$$

- Füllen Sie (mit "Ja" oder "Nein") die Tabelle aus:

Ist die DGL...	...linear?	...separabel?
Antwort		

- Wenden Sie *Trennung der Variablen* an um die DGL zu lösen.

7.c) Betrachten Sie folgende DGL:

$$y' + 2y = e^{3x}, \qquad y(0) = 1, \quad x \geq 0.$$

- Füllen Sie (mit "Ja" oder "Nein") die Tabelle aus:

Ist die DGL...	...linear?	...separabel?	...homogen?
Antwort			

- Es sei Ihnen gegeben, dass $y_h(x) = Ke^{-2x}$ die Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_h' + 2y_h = 0$ ist. Berechnen Sie hiermit die Lösung $y = y_h + y_p$ der ursprünglichen DGL mittels *Variation der Konstanten*.

Lösung von Aufgabe 7: (2+3)+(2+5)+(2+6)

7.a) Aufg a

7.1)-1) Die Tabelle

Ist die DGL...	...linear?	...separabel?	...homogen?
Antwort	ja	ja	ja

7.2)-2) Die Lösung der DGL: Formel anwenden: wo $t_0 = 0$, $r(t) = 3\frac{1}{t+1}$, damit $R(t) = \int_0^t r(s)ds = 3\ln(|t+1|)$. Also

$$f(t) = f(0)e^{R(t)} = 5e^{\ln(|t+1|^3)} = 5(t+1)^3$$

7.b) Aufg b

7.b)-1) Die Tabelle

Ist die DGL...	... linear?	... separabel?
Antwort	Nein	ja

7.b)-2) Durch Trennung der Variablen kriegt man:

$$\int e^y dy = \int 2x dx \Leftrightarrow e^y = x^2 + K \Rightarrow y(x) = \ln|x^2 + K|.$$

Also $y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 = \ln|0^2 + K| \Leftrightarrow \ln K = 1 \Leftrightarrow K = e$. Die Lösung ist der DGL ist $y(x) = \ln|x^2 + e|$.

7.c) Aufg c

7.c)-1) Die Tabelle

Ist die DGL...	... linear?	... separabel?	... homogen?
Antwort	ja	Nein	nein

7.c)-2) Die Lösung der DGL: Variation der Konstanten $K \to K(x)$, dann $y_p = K(x)e^{-2x}$. Die DGL für $K(x)$ ist

$$\left(K'(x)e^{-2x} + K(x)(-2)e^{-2x}\right) + 2\left(K(x)e^{-2x}\right) = e^{3x} \Leftrightarrow K'(x) = e^{5x} \Rightarrow K(x) = \frac{1}{5}e^{5x}.$$

Also $y_p = \frac{1}{5}e^{5x-2x} = \frac{1}{5}e^{3x}$ Die Lösung ist dann $y(x) = y_h + y_p = Ke^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$.

Mit $y(0) = 1$, haben wir $1 = y(0) = Ke^0 + \frac{1}{5}e^0 = K + \frac{1}{5} \Rightarrow K = 1 - \frac{1}{5} = 4/5$.