Klausur

Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. G. Nunes dos Reis

Sommersemester 2013
24. Juli 2013

Klausur
Mathematik II für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind, bis auf einen nicht-programmierbaren Taschenrechner, Lineal und Stifte, keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Handys sind auch verboten! *Eine Zuwiderhandlung ist ein Betrugsversuch.*

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel, ab!

Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

Korrektur

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	30	20	15	19	16	100
Wo ist die Antwort?						—
Note						
Unterschrift						

Klausur Notenschlüssel

"100er Mathe Economics"		
1.0	98-100	Sehr gut
1.3	93-97	
1.7	87-92	Gut
2.0	81-86	
2.3	75-80	
2.7	70-74	Befriedigend
3.0	65-69	
3.3	59-64	
3.7	53-58	Ausreichend
4.0	50-52	
5.0	00-49	Mangelhaft

Aufgabe 1: Lineare Algebra - Teil I (30 Punkte)

1.a) Betrachten Sie folgenden Matrizen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 1 & \pi \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tragen Sie die Dimensionen von C und D in die folgende Tebelle ein:

Matrix:	C	D
Dimension $(m \times n)$:		

Tragen Sie die Dimensionen der bezeichneten Matrix Produkte oder "*nicht definiert*", wenn das bezeichnete Produkt nicht definiert ist, in die folgende Tabelle ein:

Produkte	CC^T	D^TC	D^TD	DD^T	CC^TDD^TD
Dimensionen $(m \times n)$					

1.b) Seien $\beta, \lambda \in \mathbb{R}$ und betrachten Sie folgendes LGS

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 & = 13 \\ x_1 \qquad + \beta x_3 & = \lambda. \end{cases}$$

i) Stellen Sie das LGS in Matrix-Form dar, d.h. in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$. Füllen Sie die Lücken

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

ii) Geben Sie $\bar{A}$, die erweiterte Matrix des Systems, an und bringen Sie das Matrix System mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahren in die obere Dreiecksform.

iii) Für $\beta = 2$ und $\lambda = 2$ ist das LGS eindeutig lösbar. Berechnen Sie diese einzige Lösung.

iv) Setzen Sie $\lambda = 3$. Wählen Sie β so dass $Rang(A) = 2$. Ist das System, für Ihren gewählten Wert β, lösbar? Begründen Sie ihre Antwort kurz (**Tipp:** Es kann hilfreich sein das Gleichungssystem explizit zu betrachten, nicht in Matrixform).

v) Setzen Sie $\lambda = 2$. Wählen Sie β so dass es unendlichen viele Lösungen für das System gibt. Was kann man in diesem Fall über die lineare abhängigkeit der Zeilen von A sagen? Berechnen Sie die Lösung(en) des LGS $A\vec{x} = \vec{b}$

vi) Nennen Sie zwei andere Methoden (aus der Vorlesung Mathe. 2 f. Oko.) um das System $A\vec{x} = \vec{b}$ zu lösen wenn $Rang(A) = 3$,

[$\triangleright$] Methode # 1: ________________________ [$\triangleright$] Methode # 2: ________________________

Lösung von Aufgabe 1:

7+(2+[1+3]+3+[2+2]+[2+1+2+3]+[1+1]) = 5+(2+4+3+4+8+2)=7+23 = 30

1.a) Füllen Sie die Tabelle mit den Dimensionen C und D

Matrix:	C	D
Dimension $(m \times n)$:	3×2	3×1

Die 2.te Tabelle sieht so aus:

Produkte	CC^T	D^TC	D^TD	DD^T	CC^TDD^TD
Dimensionen	$(3 \times 2) \times (2 \times 3)$	$(1 \times 3) \times (3 \times 2)$	$(1 \times 3) \times (3 \times 1)$	$(3 \times 1) \times (1 \times 3)$	$(3 \times 3) \times (3 \times 3)$ $\times(3 \times 1)$
$(m \times n)$	$= 3 \times 3$	$= 1 \times 2$	$= 1 \times 1$	$= 3 \times 3$	$= 3 \times 1$

1b) i)

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 13 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

ii) Gauss: $\bar{A}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & -1 & 13 \\ 1 & 0 & \beta & \lambda \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} -- \\ \texttt{II-4I} \\ \texttt{III-I} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta & \lambda - 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{array}{c} -- \\ -- \\ \texttt{III+II} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & \lambda - 2 \end{array}\right]$$

iii) Für $\beta = \lambda = 2$, haben wir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{cl} x_1 - x_2 & = 3 \\ -x_2 - x_3 & = 1 \\ x_3 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 2 \\ x_2 & = -1 \\ x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

Also, die Lösung des Systems für $\beta = \lambda = 2$ ist $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 0)$.

iv) Mit $\lambda = 3$; $Rang(A) = 2$ genau wenn $\beta = 1$; das kann man von *ii)* sehen.

$Rang(A) \neq Rang(\bar{A})$ bedeutet das ein Wiederspruch im System es gibt, und es gibt keine Lösung. (oder dass die letzte Gleichung ein Wiederspruch, $0 = 1$, ist)

v) Mit $\lambda = 2$ gibt es unendliche viele lösungen genau wenn $\beta = 1$;

Für $\beta = 1$ gilt $Rang(A) = 2 \Rightarrow A$ ist nicht Vollrang $\Rightarrow$ die Zeilen A sind linear abhängig.

Für $\beta = 1$, $\lambda = 2$, haben wir das System

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 - x_2 & = 3 \\ -x_2 - x_3 & = 1 \\ 0 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 3 + x_2 \\ x_2 & = -1 - x_3 \\ 0 & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = 2 - x_3 \\ x_2 & = -1 - x_3 \\ 0 & = 0 \end{array} \right.$$

Die Lösungsmenge ist (x_3 ist frei!)

$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 2 - x_3; \quad x_2 = -1 - x_3; \quad x_3 \in \mathbb{R}\}$

alternative

$x_1 = 2 - x_3; \quad x_2 = -1 - x_3; \quad x_3 \in \mathbb{R}$ oder x_3 ist “Frei”.

vi) Wenn $Rang(A) = 3 \Rightarrow \det(A) \neq 0$; $\triangleright$ # 1: Cramer’sche Regel; $\triangleright$ # 2: Inverse Matrix

Aufgabe 2: Simplex-Algorithmus (20 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Simplex Algorithmus die Optimale Lösung x^* und den optimalen Wert $F(x^*)$ des folgenden Tableaus. Nutzen Sie dazu die leeren Tableaus, geben Sie in jedem Schritt die aktuelle Basis Lösung an und markieren Sie die jeweilige Pivotzeile und -spalte! Kreuzen Sie zwischen den Tableaus an, welchen Algorithmus Sie benutzen.

Hinweis: Es ist möglich, dass Sie nicht alle drei Tableaus benötigen. Sie sollten aber keinesfalls mehr Schritte brauchen.

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
y_1	-1	-1	1	0	0	-80
y_2	-5	-1	0	1	0	-120
y_3	6	1	0	0	1	140
$-c$	-2	-1	0	0	0	0

↑ Aktuelle Basis Lösung: $x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____; $y_1 =$ _____; $y_2 =$ _____; $y_3 =$ _____;

↓ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ☐? (bitte markieren)

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
$-c$						

↑ Aktuelle Basis Lösung: $x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____; $y_1 =$ _____; $y_2 =$ _____; $y_3 =$ _____;

↓ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ☐? (bitte markieren)

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
$-c$						

↑ Aktuelle Basis Lösung: $x_1 =$ _____; $x_2 =$ _____; $y_1 =$ _____; $y_2 =$ _____; $y_3 =$ _____;

↓ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ☐? (bitte markieren)

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
$-c$						

Ihre Lösung: $F(\bar{x}) =$ __________; $\bar{x} = (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = \Big(\quad , \quad , \quad , \quad , \quad \Big)$

Lösung von Aufgabe 2: 8+8+$\Big($[2+2]$\Big)$=8+8+4=20

Die Lösung:

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
y_1	-1	-1	1	0	0	-80
y_2	-5	$\boxed{-1}$	0	1	0	-120
y_3	6	1	0	0	1	140
$-c$	-2	-1	0	0	0	0

$\uparrow$ Aktuelle Basis Lösung: $x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ y_1 = -80;\ y_2 = -120;\ y_3 = 140;$

Die Basis lösung ist nicht zulässig, muss man mit Dual Algorithmus anfangen.
Die 2.te Zeile ist dei Pivot Zeile (wo der kleinste Zahl, -120, ist; blau markiert).
Die Pivot Zeile, ist $\frac{c_j}{A_{i,j}} = \{\frac{-2}{-5}, \frac{-1}{-1}, -, -, -\} = \{\frac{2}{5}, \boxed{1}, -, -, -\}$ weil $1 > 2/5 = 0.4$

$\downarrow$ Welcher Algorithmus: Primal ☐? Dual ■?

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
y_1	4	0	1	-1	0	40
x_2	5	1	0	-1	0	120
y_3	1	0	0	$\boxed{1}$	1	20
$-c$	3	0	0	-1	0	120

$\uparrow$ Aktuelle Basis Lösung: $x_1 = 0;\ x_2 = 120;\ y_1 = 40;\ y_2 = 0;\ y_3 = 20;$

Die Einträge $\vec{b}$ sind positive $\Rightarrow$ Die Basis Lösung ist zulässige $\Rightarrow$ Primal algorihtmus
Pivot Spalte ist die y_2-Spalte wo die einzige Negative eintrag c ist.
In der Pivot Spalte, gibt es nur einen Positive eintrag, der an der y_3-Zeile.

$\downarrow$ Welcher Algorithmus: Primal ■? Dual ☐?

Basis	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	b
y_1	5	0	1	0	1	60
x_2	6	1	0	0	1	140
y_2	1	0	0	1	1	20
$-c$	4	0	0	0	1	140

$\uparrow$ Aktuelle Basis Lösung: $x_1 = 0;\ x_2 = 140;\ y_1 = 60;\ y_2 = 20;\ y_3 = 0;$

Die Basis lösung ist zulässige und alle Einträge c sind ≥ 0
$\Rightarrow$ Primal ist zu ende gekommen und man kann das Optimum ablesen.

1-Mal Dual, 1-Mal Primal und Antwort

$$F(\vec{x}^*) = 140, \qquad \bar{x}^* = (x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (0, 140, 60, 20, 0)$$

Aufgabe 3: Integration - Teil I **(15 Punkte)**

1. Berechnen Sie mit partieller Integration das Integral
$$\int 2xe^{-2x+1}dx$$

2. Sei b eine positive reele Zahl. Berechnen Sie das folgende Integral durch Substitution,
$$\int_{-1}^{b} xe^{-x^2}dx.$$

Lösung von Aufgabe 3: (1+2+2+2)+(2+1+1+3+1)=7+8=15

3.a) Partieller Integration Formel $\int uv'dx = uv - \int u'vdx$. Zu berechnen ist $\int xe^{-x}dx$, wählt man

$$u = 2x \;\Rightarrow\; u' = 2 \quad \text{und} \quad v' = e^{-2x+1} \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{2}e^{-2x+1}.$$

alternative

$$u = x \;\Rightarrow\; u' = 1 \quad \text{und} \quad v' = 2e^{-2x+1} \;\Rightarrow\; v = -e^{-2x+1}.$$

Partieller Integration liefert dann

$$\int 2xe^{-2x+1}dx = -xe^{-2x+1} - \int 1(-\frac{1}{2}e^{-2x+1})dx = -xe^{-2x+1} + \int e^{-2x+1}dx$$
$$= -xe^{-2x+1} - \frac{1}{2}e^{-2x+1} = -e^{-2x+1}(x + \frac{1}{2}) + C.$$

3.b) Für $u = -x^2$ ist

$$\frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow du = -2xdx \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2x}du..$$

Die Grenzwerte transformation ist:

$$\text{für } x = -1 \Rightarrow u(-1) = -1; \qquad \text{für } x = b \Rightarrow u(b) = -b^2;$$

Setzt man die Substitution ein

$$\int_{-1}^{b} xe^{-x^2}dx = \int_{-1}^{-b^2} -\frac{1}{2x}\cdot x \cdot e^u du = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{-b^2} e^u du$$
$$= -\frac{1}{2}[e^u]_{-1}^{-b^2} = -\frac{1}{2}(e^{-b^2} - e^{-1}) = \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-b^2}.$$

Aufgabe 4: Integration - Teil II (19 Punkte)

Betrachten Sie die zwei folgenden Funktionen

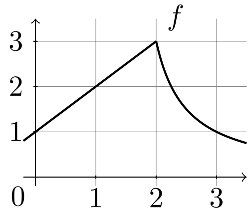
$$g(x) = \frac{4}{x+1}, \quad x \geq 0 \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & , x \leq 2 \\ \frac{3}{2x-3} & , x \geq 2 \end{cases} .$$

4.a) Zu berechnen ist die Fläche zwischen $f(x)$ und $g(x)$ im Interval $[1, 3]$.

i) Berechnen Sie $g(1)$ und $g(3)$.

$g(1) =$ ___________ $\qquad g(3) =$ ___________

ii) Skizzieren Sie die Funktion g im gegebenen Koordinatensystem und markieren Sie die zu berechnende Fläche.



iii) Berechnen Sie die Stammfunktionen von g und f (für $x \geq 2$ und $x \leq 2$).

iv) Berechnen Sie die markierte Fläche (für ihre Antwort genügt es, die Integrationsgrenzen einzusetzen, d.h. hier ist ihr Taschenrechner nicht nötig).

4.b) Betrachten Sie wieder die oben definierte Funktion g. Existiert das uneigentliche Integral

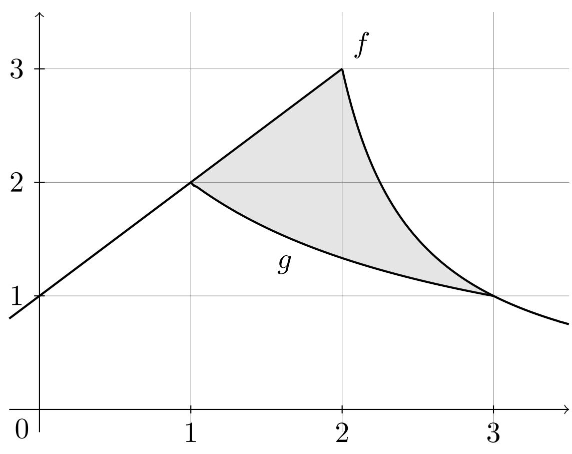
$$\int_0^\infty g(x)dx \; ?$$

Lösung von Aufgabe 4: 1+[2+2+3]+[2+2]+[2+1]+[2+1+1]=1+7+4+3+4=19

4.a) Fläche Berechnung

i) $g(1) = 2 = f(1)$ und $g(3) = 1 = f(3)$.

ii) Die Funktion g ist monotone fallend und f liegt offenbar oberhalb von g auf $[1, 3]$.



iii) Die Stammfunktionen

$$\int \frac{4}{x+1}dx = 4\ln|x+1| + C \qquad \text{Stammfunktion } g \qquad (1)$$

$$\int x+1dx = \frac{x^2}{2} + x + C \qquad \text{Stammfunktion } f\text{, für } x \le 2 \qquad (2)$$

$$\int \frac{3}{2x-3}dx = \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C \qquad \text{Stammfunktion } f\text{, für } x \ge 2 \qquad (3)$$

iv)

$$\begin{aligned}
\int_1^3 |f(x) - g(x)|dx &= \int_1^3 f(x) - g(x)dx = \int_1^2 f(x) - g(x)dx + \int_2^3 f(x) - g(x)dx \\
&= \int_1^2 [x + 1 - \frac{4}{x+1}]dx + \int_2^3 [\frac{3}{2x-3} - \frac{4}{x+1}]dx \\
&= \Big[\frac{x^2}{2} + x - 4\ln|x+1|\Big]_1^2 + \Big[\frac{3}{2}\ln|2x-3| - 4\ln|x+1|\Big]_2^3 \\
&= \Big(\frac{4}{2} + 2 - 4\ln 3\Big) - \Big(\frac{1}{2} + 1 - 4\ln 2\Big) + \Big(\frac{3}{2}\ln 3 - 4\ln 4\Big) - \Big(\frac{3}{2}\ln 1 - 4\ln 3\Big) \\
&= \cdots \approx 1.375333
\end{aligned}$$

4.b) Bis Unendlich. Das ist ein uneigentliches Integral, dass man direkt nicht berechnen kann. Das Integral hat Sinn nur durch ein Limmesm d.h.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(x)dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b g(x)dx \\
&= \lim_{b\to\infty} [4\ln|x+1|]_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} (4\ln|b+1| - 4\ln|1|) \\
&= \lim_{b\to\infty} 4\ln|b+1| = \infty.
\end{aligned}$$

D.h. das Integral existiert nicht.

Aufgabe 5: Differentialgleichungen (16 Punkte)

5.a) Betrachten Sie folgende DGL

$$y' = \frac{y^2}{x}, \qquad , x \ge 1,\ y(1) = -\frac{1}{2}.$$

Die obere DGL ist separabel und nichtlinear. Berechnen Sie, durch die Methode der *Trennung der Variablen*, die Lösung der DGL.

5.b) Betrachten Sie folgende lineare inhomogene DGL:

$$y' - 4xy = e^{2x^2}, \qquad y(0) = 10, \quad x \ge 0.$$

Es sei Ihnen gegeben, dass $y_h(x) = Ke^{2x^2}$ die Lösung der zugehörigen homogenen DGL $y_h' - 4xy_h = 0$ ist. Berechnen Sie damit die Lösung $y = y_h + y_p$ der ursprünglichen DGL mittels *Variation der Konstanten.*

Lösung von Aufgabe 5: $\Big(2{+}2{+}1{+}1\Big){+}\Big(2{+}2{+}2{+}2{+}1{+}1\Big){=}6{+}10{=}16$

5.a) Einfach Trennung der Variablen

$$
\begin{aligned}
y' = \frac{y^2}{x} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} &\Rightarrow \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x}dx \\
&\Rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \int \frac{1}{x}dx \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = \ln|x| + K \Leftrightarrow y = -\frac{1}{K + \ln|x|}
\end{aligned}
$$

Um K zu bestimmen setzen wir die Bedingung $y(1) = 2$ ein, nämlich

$$-\frac{1}{2} = y(1) \;\Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{K + \ln|1|} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{K} \Rightarrow K = 2.$$

Die Lösung der DGL ist

$$y(x) = -\frac{1}{2 + \ln|x|}.$$

5.b) Die Lösung der DGL:

- Variation der Konstanten $K \to K(x)$, dann $y_p = K(x)e^{2x^2}$.
- Die DGL für $K(x)$ ist

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\Big(K'(x)e^{2x^2} + \cancel{K(x)(4x)e^{2x^2}}\Big)}_{y_p'} - \underbrace{\cancel{4x\Big(K(x)e^{2x^2}\Big)}}_{4xy_p} = e^{2x^2} \\
&\Leftrightarrow K'(x)e^{2x^2} = e^{2x^2} \\
&\Leftrightarrow K'(x) = 1 \Rightarrow K(x) = x.
\end{aligned}
$$

- Also $y_p(x) = xe^{2x^2}$
- Die Lösung ist dann $y(x) = y_h + y_p = Ke^{2x^2} + xe^{2x^2}$.
- Mit $y(0) = 1$, haben wir $10 = y(0) = Ke^0 + 0 \Leftrightarrow K = 10$.
- Die Lösung der DGL ist

$$y(x) = 10e^{2x^2} + xe^{2x^2}.$$