Klausur A

Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Sebastian Riedel

Wintersemester 2013/14
27. Februar 2014

Klausur
Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind Stifte und ein zweiseitig handbeschriebenes A4-Formelblatt zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones etc. dürfen nicht verwendet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel und Ihr Formelblatt, ab.

Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

Korrektur

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	18	12	15	15	18	22	100
Wo ist die Antwort?							—
Note							
Unterschrift							—

Klausur Notenschlüssel

"100er Mathe Economics"		
1.0	98-100	Sehr gut
1.3	93-97	
1.7	87-92	Gut
2.0	81-86	
2.3	75-80	
2.7	70-74	Befriedigend
3.0	65-69	
3.3	59-64	
3.7	53-58	Ausreichend
4.0	50-52	
5.0	00-49	Mangelhaft

1. Aufgabe

18 Punkte

Sie haben 2600 EUR und wollen diese bei Ihrer Bank anlegen. Ihr Berater macht Ihnen zwei Angebote: Bei Anlage A wird Ihr Geld jährlich mit 2 % verzinst, allerdings werden Ihnen zu Anfang 100 EUR Abschlussgebühren von den 2600 EUR abgezogen. Bei Anlage B wird Ihr Geld jährlich mit 5 % verzinst, allerdings werden Ihnen dabei 600 EUR Abschlussgebühren berechnet. Bei beiden Angeboten verbleiben die Zinsen in der Festanlage und werden im nächsten Jahr mit verzinst.

(i) Berechnen Sie das Kapital in Anlage A und B nach zwei Jahren.

(ii) Welche der beiden Anlagen würden Sie auf lange Sicht hin vorziehen? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Ihr Berater macht Ihnen noch ein drittes Angebot. Bei Anlage C werden Ihnen keine Abschlussgebühren berechnet, die Verzinsung auf Ihren eingezahlten Betrag liegt ebenfalls bei 5 %, allerdings gibt es auf die Zinsen selbst keine Zinsen mehr (d.h. pro Jahr wird Ihnen ein konstanter Betrag als Zins ausgezahlt). Würden Sie auf das Angebot eingehen, wenn Sie langfristig investieren möchten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(i) Nach Zinsezinsformel gilt für Anlage A, wenn K_2^A das Kapital nach 2 Jahren bezeichnet,

$$K_2^A = (2600 - 100)\left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 = 2500\left(\frac{51}{50}\right)^2 = 51^2 = 2601$$

und für das Kapital K_2^B für Anlage B nach zwei Jahren erhalten wir

$$K_2^B = (2600 - 600)\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = 2000\left(\frac{21}{20}\right)^2 = \frac{2000 \cdot 21^2}{400} = 2205.$$

(ii) Da der Zinssatz bei Anlage B höher ist als bei Anlage A würde man Anlage B vorziehen, da nach hinreichend langer Zeit der Gewinn bei Anlage B höher ist als bei Anlage A. Formal gilt, wenn K_n^A bzw. K_n^B das Kapital in Anlage A bzw. B nach n Jahren bezeichnet,

$$\frac{K_n^B}{K_n^A} = \frac{2000}{2500}\frac{\left(\frac{105}{100}\right)^n}{\left(\frac{102}{100}\right)^n} = \frac{2000}{2500}\left(\frac{105 \cdot 100}{100 \cdot 102}\right)^n = \frac{4}{5}\left(\frac{105}{102}\right)^n \to \infty$$

für $n \to \infty$. Insbesondere ist K_n^B ist nach langer Zeit immer grösser als K_n^A.

(iii) Nein. Bei Anlage C ist die Höhe des Kapitals nach n Jahren gegeben durch

$$K_n^C = 2600 + n\left(\frac{2600 \cdot 5}{100}\right) = 2600 + n \cdot 130,$$

bei Anlage B gilt

$$K_n^B = 2600\left(\frac{21}{20}\right)^n = 2600e^{n(\ln(21) - \ln(20))}$$

Wir wissen aber (z.B. mit der Regel von l'Hôpital), dass

$$\frac{K_n^B}{K_n^C} \to \infty$$

für $n \to \infty$ gilt, d.h. auf lange Sicht hin ist das Kapital in Anlage B grösser als in Anlage C (oder auch: Die e-Funktion wächst schneller als jedes Polynom).

2. Aufgabe

12 Punkte

(i) Berechnen Sie den Grenzwert der angegebenen Folgen für $n \to \infty$.

$$a_n = \frac{1}{1+n}; \qquad b_n = e^{-n} + 1; \qquad c_n = \frac{1}{2+\sqrt{n}};$$

$$d_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1}; \qquad e_n = \ln(3n^2+2) - \ln(n^2+1)$$

(ii) Argumentieren Sie warum die angegebene Folge konvergiert und geben Sie den Grenzwert an.

$$\alpha_n = (-1)^n e^{-n}$$

Lösung:

(i)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0; \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 1; \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

Weiterhin gilt

$$d_n = \frac{2n^2+3}{n^2+1} = \frac{2+3/n^2}{1+1/n^2} \to \frac{2}{1} = 2$$

für $n \to \infty$. Nach den Logarithmusgesetzen ist

$$e_n = \ln(3n^2+2) - \ln(n^2+1) = \ln\left(\frac{3n^2+2}{n^2+1}\right)$$

und es gilt

$$\frac{3n^2+2}{n^2+1} = \frac{3+2/n^2}{1+1/n^2} \to 3$$

für $n \to \infty$. Da der Logarithmus stetig ist, folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{3n^2+2}{n^2+1}\right) = \ln(3).$$

(ii) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Dies folgt mit Satz 2.10 aus der Vorlesung: $(e^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge und $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine beschränkte Folge.

3. Aufgabe

15 Punkte

Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3^n}$ für $n \geq 1$.

(i) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$a_n = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}$$

gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(*Hinweis: Sie dürfen die Formel für a_n aus Teil (i) benutzen, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben sollten.*)

Lösung:

(i) *Induktionsanfang.* Für $n = 1$ ergibt einsetzen in die Formel

$$a_1 = 3 - \frac{1}{3^0} = 3 - 1 = 2,$$

also stimmt die Formel für $n = 1$.

Induktionsvoraussetzung. Wie nehmen an, für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $a_n = 3 - \frac{1}{3^{n-1}}$.

Induktionsschritt. Wir wollen zeigen, dass

$$a_{n+1} = 3 - \frac{1}{3^n}$$

ist. Nach Rekursionsvorschrift gilt

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{3^n} \stackrel{\text{I.V.}}{=} 3 - \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{2}{3^n} = 3 - \frac{3}{3^n} + \frac{2}{3^n} = 3 - \frac{1}{3^n}$$

was zu zeigen war.

(ii) Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 3 - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n-1}}}_{=0} = 3$$

4. Aufgabe 15 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto x \cdot e^{-x^2}$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremstellen.

(ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Lösung:

(i) Nach Kettenregel und Produktregel gilt für die ersten beiden Ableitungen

$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$
$$f''(x) = -4xe^{-x^2} + (1 - 2x^2)(-2x)e^{-x^2} = 2x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$$

Wir setzen nun $f'(x) = 0$ und sehen dass dies genau dann der Fall ist wenn $(1 - 2x^2) = 0$ ist. Die Lösungen dieser Gleichung sind gegeben durch $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, also sind dies beides Kandidaten, bei denen Extremstellen vorkommen können. Einsetzen in die zweite Ableitung ergibt

$$f''(x_1) = \frac{2}{\sqrt{2}}(1 - 3)e^{-1/2} < 0$$
$$f''(x_2) = -\frac{2}{\sqrt{2}}(1 - 3)e^{-1/2} > 0,$$

also existiert an der Stelle x_1 ein lokales Maximum und an der Stelle x_2 ein lokales Minimum.

(ii) Mit der Regel von L'Hôpital gilt

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = 0$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = 0.$$

5. Aufgabe 18 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion:

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}; \qquad x\mapsto x^3 - x + 1$$

(i) Berechnen Sie $g'(x)$.

(ii) Führen Sie 2 Schritte der Newton–Approximation mit Startwert $x_0 = -1$ aus.

(iii) Führen Sie 3 Schritte der Newton–Approximation mit Startwert $x_0 = 0$ aus.

(iv) Man kann zeigen, dass die Funktion g an der Stelle $x \approx -1.3247$ eine Nullstelle besitzt. Vergleichen Sie Ihre Approximationen der Nullstelle aus Teil (ii) und (iii) und erklären Sie den Unterschied.

Lösung:

(i) $g'(x) = 3x^2 - 1$.

(ii) Es gilt

$$x_1 = x_0 - \frac{g(x_0)}{g'(x_0)} = -1 - \frac{-1+1+1}{3-1} = -\frac{3}{2}$$

und

$$x_2 = -\frac{3}{2} - \frac{-(3/2)^3 + 3/2 + 1}{3(3/2)^2 - 1} = -\frac{3}{2} - \frac{-7/8}{23/4} = -\frac{3}{2} + \frac{7}{46} = -\frac{31}{23} \approx -1.3478$$

(iv) Es gilt

$$x_1 = 0 - \frac{1}{-1} = 1,$$
$$x_2 = 1 - \frac{1-1+1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

und

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{(1/2)^3 - 1/2 + 1}{3(1/2)^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{5/8}{-1/4} = \frac{1}{2} + \frac{20}{8} = 3$$

(iii) Die Approximation aus (ii) liefert bereits nach zwei Schritten eine gute Näherung der Nullstelle. Die Approximation aus (iii) hingegen scheint nicht gegen die angegebene Nullstelle zu konvergieren. Der Unterschied kommt daher, dass der Startpunkt $x_0 = 0$ zu weit weg von der zu approximierenden Nullstelle gewählt wurde.

6. Aufgabe

22 Punkte

Gegeben seien die Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x,y) \mapsto x^2 \cdot e^{-x} - \frac{3}{4}y$$

und

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad (x,y) \mapsto e^{-x} + y$$

(i) Berechnen Sie den Gradienten der Lagrangefunktion $\mathcal{L}(\lambda, x, y) = f(x,y) + \lambda \cdot g(x,y)$.

(ii) Bestimmen Sie alle Kandidaten für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ mit Hilfe der Lagrangemethode.

(iii) Berechnen Sie $\det H_f(x,y)$ wobei $H_f(x,y)$ die Hesse–Matrix von f an der Stelle (x,y) bezeichnet.

(iv) Sei $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$h(x,y) := \frac{(17 + f(x,y))^{\frac{1}{512}}}{1 + (g(x,y))^{7002}}.$$

Geben Sie die Funktion $(x,y) \mapsto \partial_x \partial_y h(x,y) - \partial_y \partial_x h(x,y)$ an.

(*Hinweis: Denken Sie genau nach, bevor Sie anfangen zu rechnen...*)

Lösung:

(i) Es ist

$$\mathcal{L}(\lambda, x, y) = x^2 e^{-x} - \frac{3}{4}y + \lambda e^{-x} + \lambda y$$

und also

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \mathcal{L}(\lambda, x, y) &= e^{-x} + y \\
\partial_x \mathcal{L}(\lambda, x, y) &= 2x e^{-x} + x^2(-1)e^{-x} - \lambda e^{-x} \\
\partial_y \mathcal{L}(\lambda, x, y) &= -\frac{3}{4} + \lambda.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\nabla \mathcal{L}(\lambda, x, y) = (e^{-x} + y, (-x^2 + 2x - \lambda)e^{-x}, -3/4 + \lambda)$$

(ii) Wir setzen $\nabla\mathcal{L}(\lambda, x, y) = 0$ und erhalten das folgende Gleichungssystem:

$$e^{-x} + y = 0 \tag{1}$$
$$(-x^2 + 2x - \lambda)e^{-x} = 0 \tag{2}$$
$$-3/4 + \lambda = 0 \tag{3}$$

Aus (3) folgt, dass $\lambda = 3/4$ ist. Um x zu bestimmen setzen wir $\lambda = 3/4$ in (2) ein. Da die e-Funktion immer positiv ist reicht es die Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 2x + 3/4 = 0$$

zu berechnen. Mit quadratischer Ergänzung oder der $p - q$ Formel sieht man, dass $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$ die Gleichung löst. Setzen wir dies in (1) ein erhalten wir als Lösungskandidaten $(x_1, y_1) = (1/2, -e^{-1/2})$ und $(x_2, y_2) = (3/2, -e^{-3/2})$.

(iii) Wir berechnen zuerst

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= (-x^2 + 2x)e^{-x}\\ \partial_y f(x,y) &= -\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\partial_y\partial_x f(x,y) &= \partial_x\partial_y f(x,y) = 0\\ \partial_y\partial_y f(x,y) &= 0.\end{aligned}$$

Nach Definition der Determinante ist

$$\det H_f(x,y) = \partial_x\partial_x f(x,y)\partial_y\partial_y f(x,y) - (\partial_x\partial_y f(x,y))^2 = \partial_x\partial_x f(x,y) \cdot 0 - 0 = 0$$

(hierbei ist es also gar nicht nötig $\partial_x\partial_x f(x,y)$ zu berechnen).

(iv) Nach dem Satz von Schwartz gilt für zweimal stetig differenzierbare Funktionen h immer $\partial_x\partial_y h(x,y) = \partial_y\partial_x h(x,y)$, also ist $\partial_x\partial_y h(x,y) - \partial_y\partial_x h(x,y) = 0$.