Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. Sebastian Riedel

Wintersemester 2013/14
11. April 2014

Klausur
Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind Stifte und ein zweiseitig handbeschriebenes A4-Formelblatt zugelassen. Taschenrechner, Handys, Smartphones etc. dürfen nicht verwendet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel und Ihr Formelblatt, ab.

Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

Korrektur

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte	18	12	17	15	17	21	100
erreichte Punktzahl							
Unterschrift							—

Klausur Notenschlüssel

“100er Mathe Economics”		
1.0	98-100	Sehr gut
1.3	93-97	
1.7	87-92	Gut
2.0	81-86	
2.3	75-80	
2.7	70-74	Befriedigend
3.0	65-69	
3.3	59-64	
3.7	53-58	Ausreichend
4.0	50-52	
5.0	00-49	Mangelhaft

1. Aufgabe

18 Punkte

Sie möchten in jedem Jahr 5000 EUR anlegen. Ihre Bank macht Ihnen folgendes Angebot: Am Anfang des ersten Jahres zahlen Sie 5000 EUR ein. Dann werden Ihnen am Ende des Jahres 5 % Kontoführungsgebühren berechnet und vom eingezahlten Betrag abgezogen. Im zweiten Jahr zahlen Sie dann wieder 5000 EUR ein. Am Ende des zweiten Jahres werden Ihnen dann wieder 5 % Kontoführungsgebühren auf Ihren bis dahin angesammelten Betrag berechnet. Für das Kapital nach n Jahren ergibt sich damit die folgende Formel:

$$\begin{aligned} K_n &= \frac{95}{100}\left(\cdots\left(\frac{95}{100}\left(\frac{95}{100}\cdot 5000+5000\right)+5000\right)\ldots+5000\right) \\ &= \left(\frac{95}{100}\right)^n 5000 + \left(\frac{95}{100}\right)^{n-1} 5000 + \ldots + \left(\frac{95}{100}\right) 5000 \\ &= 5000\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{95}{100}\right)^k \end{aligned}$$

(*Hinweis: Sie brauchen die obige Formel nicht zu beweisen!*)

(i) Wird Ihr angesparter Betrag nach sehr langer Zeit mehr als 1 000 000 EUR betragen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Ihre Bank macht Ihnen noch ein zweites Angebot: Im ersten Jahr berechnet man Ihnen 10 % Kontoführungsgebühren auf den Betrag, den Sie einzahlen möchten, anschließend wird das Geld auf das Konto verbucht. Im zweiten Jahr werden Ihnen wieder 10 % Kontoführungsgebühren von dem Betrag, den Sie einzahlen möchten, abgezogen, und anschließend auf das Konto verbucht. Das geht in den darauf folgenden Jahren immer so weiter (insbesondere wird Ihnen also von dem angesparten Betrag weder etwas abgezogen noch gutgeschrieben).

(ii) Wenn Sie sich entschließen, dieses Angebot wahrzunehmen und pro Jahr wieder 5000 EUR anzulegen, wie hoch ist Ihr angesparter Betrag nach n Jahren?

(iii) Für welches der beiden Angebote würden Sie sich entscheiden wenn Sie langfristig investieren möchten? Begründen Sie Ihre Antwort.

2. Aufgabe

12 Punkte

(i) Berechnen Sie den Grenzwert der angegebenen Folgen für $n \to \infty$.

$$a_n = \frac{1}{n^2+1}; \qquad b_n = \frac{1}{e^n}+1; \qquad c_n = \frac{1}{\sqrt{1+n}};$$

$$d_n = \frac{7n^3+3}{n^3+n^2+1}; \qquad e_n = e^{\frac{n^2-1}{2n^2+1}}$$

(ii) Wir definieren eine Folge $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n}{3}$ für $n \geq 1$. Argumentieren Sie warum diese Folge konvergiert.

3. Aufgabe 17 Punkte

Sei $f\colon \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}$ definiert als $f(x) = \frac{1}{x}$.

(i) Berechnen Sie $f'(x)$ und $f''(x)$.

(ii) Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion, dass

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \tag{1}$$

gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ wobei $f^{(n)}(x)$ die n-te Ableitung von $f(x)$ bezeichnet.

(iii) Bestimmen Sie das Taylorpolynom vom Grad 4 von f entwickelt an der Stelle $x_0 = 1$, d.h. $T_{4,f,1}(x)$.

Hinweis: Sie dürfen hierbei (1) *verwenden, selbst wenn Sie die Gleichung nicht bewiesen haben sollten. Sie müssen das Polynom nicht ausmultiplizieren.*

4. Aufgabe 15 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto x^2 \cdot e^{-x}.$$

(i) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremstellen und geben Sie an, ob es sich um lokale Minima oder Maxima handelt.

Hinweis: Es genügt hier den x-Wert anzugeben, an dem eine Extremstelle vorliegt; Sie brauchen also nicht den dazugehörigen Funktionswert zu berechnen.

(ii) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

5. Aufgabe 17 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion:

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \qquad x \mapsto e^{-x^2}.$$

(i) Berechnen Sie $g'(x)$ und $g''(x)$.

(ii) Berechnen Sie das Taylorpolynom vom Grad 2 von g entwickelt an der Stelle $x_0 = 0$, d.h. $T_{2,g,0}(x)$.

(iii) Bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} g(x)$ und $\lim_{x\to\infty} T_{2,g,0}(x)$.

(iv) Bestimmen Sie $g^{(3)}(\sqrt{2}) - T^{(3)}_{5,g,\sqrt{2}}(\sqrt{2})$ wobei $g^{(3)}(x)$ und $T^{(3)}_{5,g,\sqrt{2}}(x)$ die dritten Ableitungen von g bzw. $T_{5,g,\sqrt{2}}$ bezeichnen.

(*Hinweis: Denken Sie genau nach, bevor Sie anfangen zu rechnen...*)

6. Aufgabe 21 Punkte

Gegeben sei folgende Funktion:

$$h\colon D \to \mathbb{R}; \qquad (x,y) \mapsto \frac{y^3}{3} - 3y^2 + 5y + \frac{x^2}{2y}$$

wobei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion h.

(ii) Bestimmen Sie alle Kandidaten für lokale Extrema von h.

(iii) Berechnen Sie die Hessematrix $H_h(x,y)$.