**Institut für Mathematik**
**Wintersemester 2014/15**
Martin Slowik

# 1. Klausur zur „Mathematik I für Ökonomen"

**Lösungen**

---

**1. (Folgen und Grenzwerte)** *[20 Pkt]*

a) Eine Folge $(a_n)$ konvergiert gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $N(\varepsilon) < \infty$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$.

Jede beschränkte, monotone Folge ist konvergent.

Als Beispiel betrachte die Folgen:

i) $a_n = 1/n$ (beschränkt und konvergent).
ii) $b_n = (-1)^n$ (beschränkt und nicht konvergent).

b) Es soll die Gültigkeit der folgende Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mittels vollständiger Induktion überprüft werde.

$\boxed{\text{IA}}$ Für $n = 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$.

$\boxed{\text{IV}}$ Angenommen die Aussage ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{IS}}$ $n \to n+1$. Zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

Aber,

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} \overset{\boxed{\text{IV}}}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}.$$

c) Im folgenden sollen die Grenzwerte der gegebenen Folgen $(a_n)$, $(b_n)$ und $(c_n)$ berechnet werden.

i) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+3/n}{2-3/n^2} = \frac{1}{2}$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1-n^2}{n^{-1}\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}+1} = \frac{1}{2}$$

iii) $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**2. (Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen)** *[20 Pkt]*

a) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig, falls $\lim_{z\to x_0} f(z) = f(x_0)$ ist.

b) Der links- und rechtsseitigen Grenzwert der Funktion $f(x) = x(x-1)/|x-1|$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\lim_{x\searrow 1} f(x) &= \lim_{x\searrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\searrow 1} x = 1,\\ \lim_{x\nearrow 1} f(x) &= \lim_{x\nearrow 1} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} = \lim_{x\searrow 1} (-x) = -1.\end{aligned}$$

Betrachte nun die Funktion $g(x) = 1/x^3$. Dann ergibt sich für den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$

$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x^3} = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\nearrow 0} g(x) = \lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x^3} = -\infty.$$

c) Gegeben sei die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}, & x > 0 \\ p+4, & x \leq 0. \end{cases}$$

Im folgenden soll der Parameter $p$ so bestimmt werden, dass die Funktion $h$ im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist. Dazu gilt es zunächst einmal den rechts- bzw. linksseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 0$ zu bestimmen. Dabei gilt

$$\lim_{x\nearrow 0} h(x) = \lim_{x\nearrow 0} p+4 = p+4.$$

Andererseits ergibt sich mit Hilfe des Satzes von de l'Hospital

$$\lim_{x\searrow 0} h(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{-\tan(x)}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\searrow 0} \frac{-1/\cos^2(x)}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Wählt man nun $p = -9/2$, dann stimmen der rechts- und linksseitige Grenzwert überein und es gilt $\lim_{x\to 0} h(x) = -1/2 = h(0)$. Mit dieser Wahl ist die Funktion $h$ im Punkte $x_0 = 0$ stetig.

**3. (lokale und globale Extrema)** *[20 Pkt]*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

a) Der Gradienten und die Hessematrix der Funktion $f$ sind gegeben durch

$$\nabla f(x,y) \;=\; \big(2x + y - 2, x + 2y - 1\big) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Hess} f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Eine zweimal partiell differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $(x_0, y_0)$ ein lokales, isoliertes Minimum, wenn $\nabla g(x_0, y_0) = (0,0)$ ist und es gilt:

$$\partial_x \partial_x g(x_0, y_0) > 0 \qquad \text{und} \qquad \det \operatorname{Hess} g(x_0, y_0) > 0.$$

c) Im folgenden soll die Funktion $f$ auf lokale Extrema untersucht werden.

Aus dem notwendigen Kriterium für Extrema von differenzierbaren Funktionen ergibt sich

$$0 \;=\; \nabla f(x,y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \;=\; 2x + y - 2 \quad \wedge \quad 0 \;=\; x + 2y - 1.$$

Durch Auflösen der zweiten Gleichung nach $x = 1 - 2y$ und Einsetzen in die erste Gleichung erhält man

$$0 \;=\; -3y \quad \wedge \quad x \;=\; 1 - 2y \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 1 \quad \wedge \quad y \;=\; 0,$$

d.h. die Funktion $f$ besitzt an der Stelle $(1,0)$ einen kritischen Punkt. Weiterhin gilt

$$\operatorname{Hess} f(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da $\partial_x \partial_x f(1,0) = 2 > 0$ und $\det \operatorname{Hess} f(1,0) = 4 - 2 = 2 > 0$ ist, folgt somit aus dem hinreichenden Kriterium für lokale Extrema von differenzierbaren Funktionen, dass die Funktion $f$ im Punkt $(1,0)$ ein lokales, isoliertes Minimum besitzt mit $f(1,0) = 0$.

**4. (lokale Extrema und Taylorentwicklung)** *[20 Pkt]*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;=\; 5\ln(1+x^2) - 3x.$$

a) Die ersten beiden Ableitungen der Funktion $f$ sind gegeben durch

$$f'(x) \;=\; \frac{10x}{1+x^2} - 3 \qquad \text{und} \qquad f''(x) \;=\; \frac{10(1+x^2) - 20x^2}{(1+x^2)^2} \;=\; \frac{10(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

b) Eine zweimal differenzierbare Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle $x_0$ ein lokales Maximum, wenn $g'(x_0) = 0$ und $g''(x_0) < 0$ ist.

c) Im folgenden soll die Funktion $f$ auf lokale Extrema untersucht werden.

Aus dem notwendigen Kriterium für Extrema von differenzierbaren Funktionen ergibt sich

$$0 \;=\; f'(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3(1+x^2) \;=\; 10x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \;=\; x^2 - \frac{10}{3}x + 1$$

Durch Auflösen dieser quadratischen Gleichung erhält man somit

$$x_{1/2} \;=\; \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9} - 1} \;=\; \frac{5}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}} \;=\; \frac{5}{3} \pm \frac{4}{3},$$

d.h. die Funktion $f$ besitzt zwei kritische Stellen, nämlich $x_1 = 1/3$ oder $x_2 = 3$. Durch Einsetzen dieser Werte indie zweite Ableitung von $f$ ergibt sich

$$f''(x_1) \;=\; \frac{36}{5} \;>\; 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_2) \;=\; -\frac{4}{5}.$$

Aus dem hinreichenden Kriterium für lokale Extrema von differenzierbaren Funktionen, folgt somit, dass die Funktion $f$ an der Stelle $x_1$ ein lokales Minimum besitzt mit $f(x_1) = 5\ln(10/9) - 1 \approx -0.4732$ und an der Stelle $x_2$ ein lokales Maximum besitzt mit $f(x_2) = 5\ln(10) - 9 \approx 2.5129$.

Zudem ist die Funktion $f$ auf dem Intervall $(1,\infty)$ (strikt) konkav, da $f''(x) < 0$ für alle $x \in (1,\infty)$ ist.

d) Das zweite Taylorpolynom $T_2f(x;a)$ von $f$ an der Stelle $a = 0$ und $a = 3$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} T_2f(x;0) \;&=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 \\ &=\; -3x + 5x^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2f(x;3) \;&=\; f(3) + \frac{f'(3)}{1!}\,(x-3) + \frac{f''(3)}{2!}\,(x-3)^2 \\ &=\; 5\ln(10) - 9 - \frac{2}{5}\,(x-3)^2. \end{aligned}$$

**5. (Differentiation und implizite Funktionen)** *[20 Pkt]*

Die Funktion $y = y(x)$ sei implizit gegeben durch die Lösung der Gleichung

$$f(x,y) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{xy}}{x} \;=\; 1.$$

a) Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f$ sind gegeben durch

$$\partial_x f(x,y) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{xy}yx - \mathrm{e}^{xy}}{x^2} \;=\; \frac{xy-1}{x^2}\,\mathrm{e}^{xy} \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^{xy}.$$

b) Die erste Ableitung der Funktion $y$ ist somit gegeben durch

$$y'(x) \;=\; -\frac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)} \;=\; -\frac{xy-1}{x^2}.$$

Für die zweite Ableitung der Funktion $y$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned} y''(x) \;&=\; -\frac{(y+xy')x^2 - (xy-1)2x}{x^4} \;=\; -\frac{x^2y' - xy + 2}{x^3} \\ &=\; -\frac{-xy+1-xy+2}{x^3} \;=\; \frac{2xy-3}{x^3}, \end{aligned}$$

wobei im dritten Schritt die Darstellung von $y'$ eingesetzt wurde.

c) Es soll nun gezeigt werden, dass $y(\mathrm{e}^1) = \mathrm{e}^{-1}$ ist. Durch Einsetzen von $x = \mathrm{e}^1$ in die Gleichung $f(x,y) = 1$ ergibt sich aber

$$f(\mathrm{e}^1, y) \;=\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \exp(\mathrm{e}^1 y) \;=\; \mathrm{e}^1 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathrm{e}^1 y \;=\; 1 \quad\Longleftrightarrow\quad y \;=\; \mathrm{e}^{-1}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} y'(\mathrm{e}^1) \;&=\; -\frac{\mathrm{e}^1\cdot\mathrm{e}^{-1} - 1}{\mathrm{e}^2} \;=\; -\frac{1-1}{\mathrm{e}^2} \;=\; 0, \\ y''(\mathrm{e}^1) \;&=\; \frac{2\mathrm{e}^1\cdot\mathrm{e}^{-1} - 3}{\mathrm{e}^3} \;=\; -\frac{1}{\mathrm{e}^3}. \end{aligned}$$

Da $y'(\mathrm{e}^1) = 0$ und $y''(\mathrm{e}^1) < 0$, folgt somit aus dem hinreichenden Kriterium für Extrema von differenzierbaren Funktionen, dass die Funktion an der Stelle $x = \mathrm{e}^1$ ein lokales Maximum besitzt.