Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
Martin Slowik

Technische Universität Berlin

1. Klausur zur „Mathematik I für Ökonomen”

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- **Als Hilfsmittel ist nur ein handgeschriebenes DIN A4 Blatt sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner zugelassen!**
- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Geben Sie bitte alle beschriebenen Blätter, inklusive Ihrer Schmierzettel und Ihres Formelblatts ab.
- Für die Bearbeitung der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit.
- Geben Sie immer einen vollständigen und kommentierten Rechenweg an!
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Nicht angemeldete Klausuren können nicht korrigiert werden!
- Mit Bleistift oder Rotstift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden!

Viel Erfolg!

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Summe**
Punkte						

1. (Folgen und Grenzwerte) *[20 Pkt]*

a) Was versteht man unter der Konvergenz einer Folge (a_n) gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$?

Formulieren Sie ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge!

Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine Folge an (ohne Begründung), die

i) beschränkt ist und konvergiert.

ii) beschränkt ist und nicht konvergiert.

b) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die folgende Summenformel für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \;=\; 1 - \frac{1}{n+1}.$$

c) Berechnen Sie den Grenzwert für $n \to \infty$ der untenstehenden Folgen.

$$\text{i)} \quad a_n \;=\; \frac{n^2+3n}{2n^2-3} \qquad \text{ii)} \quad b_n \;=\; \frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n^{-1}} \qquad \text{iii)} \quad c_n \;=\; \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

2. (Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen) *[20 Pkt]*

a) Was bedeutet es, dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist?

b) Berechnen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert der untenstehenden Funktionen an der Stelle x_0.

$$\text{i)} \quad f(x) \;=\; \frac{x(x-1)}{|x-1|}, \quad x_0 = 1 \qquad \text{ii)} \quad g(x) \;=\; \frac{1}{x^3}, \quad x_0 = 0.$$

c) Bestimmen Sie den Parameter p so, dass die folgende Funktion h im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

$$h(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\ln(\cos(x))}{x^2}, & x > 0 \\ p+4, & x \leq 0 \end{cases}$$

3. (lokale und globale Extrema) *[20 Pkt]*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f.

b) Welche hinreichende Bedingung muss eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ erfüllen, damit diese an der Stelle (x_0, y_0) ein lokales, isoliertes Minimum besitzt.

c) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema.

4. (lokale Extrema und Taylorentwicklung) *[20 Pkt]*

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;=\; 5\ln(1+x^2) - 3x.$$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f.

b) Welches hinreichende Kriterium muss eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen, damit g der Stelle x_0 ein lokales Maximum besitzt.

c) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extrema.

Ist die Funktion f im Intervall $(1,\infty)$ konkav oder konvex? (Begründung!)

d) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2 f(x;a)$ von f an der Stelle $a = 0$ und $a = 3$.

5. (Differentiation und implizite Funktionen) *[20 Pkt]*

Die Funktion $y = y(x)$ sei implizit gegeben durch die Lösung der Gleichung

$$f(x,y) \;=\; \frac{\mathrm{e}^{xy}}{x} \;=\; 1.$$

a) Bestimmen Sie sämtliche ersten partiellen Ableitungen der Funktion f.

b) Berechnen Sie y' und zeigen Sie, dass die zweite Ableitung der Funktion y gegeben ist durch

$$y''(x) \;=\; \frac{2xy-3}{x^3}.$$

c) Zeigen Sie, dass $y(\mathrm{e}^1) = \mathrm{e}^{-1}$ ist.

Untersuchen Sie anschließend das Verhalten der Funktion y an der Stelle $x = \mathrm{e}^1$, indem Sie $y'(\mathrm{e}^1)$ und $y''(\mathrm{e}^1)$ berechnen. Was liegt an der Stelle $x = \mathrm{e}^1$ vor?