Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
Martin Slowik

Technische Universität Berlin

Probeklausur zur „Mathematik I für Ökonomen"

Lösungen

---

1. (Folgen und Grenzwerte) *[20 Pkt]*

a) Eine Folge (a_n) ist beschränkt, wenn es ein $K < \infty$ gibt, so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. alle Folgeglieder sind im Betrag kleiner als K. *[4 Pkt]*

Ein Beispiel für eine Folge (a_n), die von unten durch 1 beschränkt und konvergiert, ist $a_n = 2 - 1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu zeigen: $a_n \to 2$ für $n \to \infty$.

Für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ soll nun $N(\varepsilon)$ so bestimmt werden, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$. Dazu betrachte

$$\big|a_n - 2\big| \;=\; \Big|2 - \frac{1}{n} - 2\Big| \;=\; \Big| - \frac{1}{n}\Big| \;=\; \frac{1}{n} \;<\; \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \;>\; \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wählt man somit $N(\varepsilon) = 1/\varepsilon$, dann gilt, dass $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$, d.h. $a_n \to 2$ für $n \to \infty$.

b) Im folgenden soll jeweils der Parameter a so bestimmt werden, dass die gegebenen Folgen (a_n) konvergieren und den Grenzwert $1/2$ besitzen. *[9 Pkt]*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3 - an^2}{n^2 - 1} \;&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(n-1) - n^3 + an^2}{n^2 - 1} \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(a-1)}{n^2-1} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{a-1}{1 - 1/n^2} \;=\; a - 1 \;\overset{!}{=}\; \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach a ergibt sich

$$a - 1 \;=\; \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \;=\; \frac{3}{2}.$$

Für $a = 3/2$ konvergiert für $n \to \infty$ somit die gegeben Folge (a_n) gegen $1/2$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n + a\sqrt{n}} - \sqrt{n} \;&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{n + a\sqrt{n} - n}{\sqrt{n + a\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{n + a\sqrt{n}} + \sqrt{n}} \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1 + a/\sqrt{n}} + 1} \;=\; \frac{a}{1+1} \;=\; \frac{a}{2} \;\overset{!}{=}\; \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach a ergibt sich

$$\frac{a}{2} \;=\; \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \;=\; 1.$$

Für $a = 1$ konvergiert somit für $n \to \infty$ die gegeben Folge (a_n) gegen $1/2$.

Zunächst einmal sei $a \neq 1$. Dann ergibt sich aus der Formel für die geometrische Reihe, dass

$$\sum_{k=1}^{n} a^k \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^k - a^0 \;=\; \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - 1 \;=\; \frac{1-a^{n+1}-1+a}{1-a} \;=\; \frac{a-a^{n+1}}{1-a}.$$

Damit die Folge (a_n) konvergiert, ist es somit notwendig, dass $|a| < 1$ ist. In diesem Fall ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{a-a^{n+1}}{1-a} \;=\; \frac{a}{1-a} \;\overset{!}{=}\; \frac{1}{2},$$

Daraus folgt durch Auflösen nach a

$$\frac{a}{1-a} = \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a = 1-a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{1}{3}.$$

Folglich konvergiert für $a = 1/3$ die gegeben Folge (a_n) gegen $1/2$ für $n \to \infty$.

c) Gegeben sei die rekursive Folge [*7 Pkt*]

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{a_n+1}\Big), \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu zeigen: $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{IA}}$ Für $n = 1$ gilt: $a_1 = 3 \geq 0$.

$\boxed{\text{IV}}$ Angenommen die Aussage ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a_n \geq 0$.

$\boxed{\text{IS}}$ $n \to n+1$. Zu zeigen: $a_{n+1} \geq 0$. Aber,

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{a_n+1}\Big) \overset{\boxed{\text{IV}}}{\geq} \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{0+1}\Big) = 0.$$

Begründung 1: Im zweiten Schritt wurde hierbei benutzt, dass

$$a_n \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \geq \frac{1}{a_n+1} \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{0+1} \leq -\frac{1}{a_n+1}.$$

Begründung 2: Im zweiten Schritt wurde hierbei benutzt, dass die Funktion $x \mapsto 1 - 1/(x+1)$ monoton wachsend ist, da für alle $x \neq -1$ gilt

$$\Big(1 - \frac{1}{x+1}\Big)' = \frac{1}{(x+1)^2} \geq 0.$$

Zu zeigen: $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{IA}}$ Für $n = 1$ gilt:

$$a_2 = \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{3+1}\Big) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} < 3 = a_1.$$

$\boxed{\text{IV}}$ Angenommen die Aussage ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a_{n+1} \leq a_n$.

$\boxed{\text{IS}}$ $n \to n+1$. Zu zeigen: $a_{n+2} \leq a_{n+1}$. Aber,

$$a_{n+2} \;=\; \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{a_{n+1}+1}\Big) \overset{\boxed{\text{IV}}}{\leq} \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{a_n+1}\Big) \;=\; a_{n+1},$$

Begründung 1: Im zweiten Schritt wurde hierbei benutzt, dass

$$a_{n+1} \;\leq\; a_n \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{a_n+1} \;\leq\; \frac{1}{a_{n+1}+1} \quad\Longleftrightarrow\quad -\frac{1}{a_n+1} \;\geq\; -\frac{1}{a_{n+1}+1}.$$

da $a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$ ist.

Begründung 2: Im zweiten Schritt wurde hierbei benutzt, dass die Funktion $x \mapsto 1 - 1/(x+1)$ monoton wachsend ist, da für alle $x \neq -1$ gilt

$$\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)' \;=\; \frac{1}{(x+1)^2} \;\geq\; 0.$$

Die Folge (a_n) ist somit von unten beschränkt und fällt monoton. Da jede monoton, beschränkte Folge konvergiert, gibt es somit eine Zahl $a \in [0,3]$, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Durch Übergang zum Grenzwert auf beiden Seiten der Rekursionsgleichung ergibt sich dann

$$a \;=\; \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3}\Big(1 - \frac{1}{a_n+1}\Big) \;=\; \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{a+1}\right) \;=\; \frac{2a}{3(a+1)}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach a erhält man

$$a \;=\; \frac{2a}{3(a+1)} \qquad\Longleftrightarrow\qquad a(3a+1) \;=\; 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad a = 0 \quad\vee\quad a = -\frac{1}{3}$$

Da aber $a \in [0,3]$ liegen muss, ergibt sich folglich $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. (Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen) [*20 Pkt*]

a) Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 eine Unstetigkeitsstelle 2. Art mit Vorzeichenwechsel, falls entweder [*4 Pkt*]

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) \;=\; +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\nearrow x_0} f(x) \;=\; -\infty$$

oder

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) \;=\; -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\nearrow x_0} f(x) \;=\; +\infty.$$

Ein Beispiel einer Funktion, die in x_0 eine Unstetigkeitsstelle 2. Art mit Vorzeichenwechsel hat, ist $f(x) = 1/x$, denn es gilt

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) \;=\; \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} \;=\; +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\nearrow 0} f(x) \;=\; \lim_{x\nearrow 0} \frac{1}{x} \;=\; -\infty.$$

b) Es soll zunächst das Verhalten der Funktion [*8 Pkt*]

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2}}{x^2-25} = \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2}}{(x-5)(x+5)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

an der Stelle $x_0 = 5$ untersucht werden. Es gilt, dass $\lim_{x\to 5} p(x) = \sqrt{2}$ und

$$\lim_{x\searrow 5} f(x) = \lim_{x\searrow 5} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2}}{(x-5)(x+5)} = \infty,$$

da $q(x) > 0$ für alle $x \in [5,6]$ und $\lim_{x\searrow 5} q(x) = 0$. Andererseits ergibt sich für

$$\lim_{x\nearrow 5} f(x) = \lim_{x\nearrow 5} \frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2}}{(x-5)(x+5)} = -\infty,$$

da $q(x) < 0$ für alle $x \in [4,5]$ und $\lim_{x\searrow 5} q(x) = 0$. Somit besitzt die Funktion f an der Stelle $x_0 = 5$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art mit Vorzeichenwechsel.

Nun soll das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{4|x|+4x}{x}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ untersucht werden. Da aber

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{4|x|+4x}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{4x+4x}{x} = \lim_{x\searrow 0} 8 = 8$$

und

$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{4|x|+4x}{x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{-4x+4x}{x} = \lim_{x\searrow 0} 0 = 0$$

besitzt die Funktion f somit an der Stelle $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 1. Art (Sprungstelle).

c) Gegeben sei die Funktion [*8 Pkt*]

$$h(x) = \begin{cases} (1-x)\,\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \neq 1 \\ 3+a, & x = 1 \end{cases}$$

Zunächst einmal ist die Funktion $x \mapsto 1-x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Funktion $x \mapsto \tan(\pi x/2)$ auf ihrem Definitionsbereich, d.h. für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig. Da das Produkt stetiger Funktionen ebenfalls stetig ist, folgt somit, dass die Funktion h stetig ist für alle $x \neq 1$, an denen der Tangens definiert ist.

Somit genügt es das Verhalten von h an der Stelle $x = 1$ näher zu untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1}(1-x)\tan(\pi x/2) &= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/2)} \\ &\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\sin(\pi x/2) + \frac{\pi}{2}(1-x)\cos(\pi x/2)}{-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x/2)} = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt de l'Hospital benutzt wurde. Damit die Funktion h an der Stelle $x = 1$ stetig ist, muss somit a so gewählt werden, dass $h(1) = 2/\pi$ ist. Daraus folgt

$$3 + a = \frac{2}{\pi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{2}{\pi} - 3.$$

3. (Newtonverfahren und Taylorentwicklung) *[20 Pkt]*

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;=\; 2\ln(1+x) - x.$$

a) Die ersten beiden Ableitungen sind gegeben durch *[4 Pkt]*

$$f'(x) \;=\; \frac{2}{1+x} - 1, \qquad f''(x) \;=\; -\frac{2}{(1+x)^2}.$$

b) Das Newtonverfahren konvergiert gegen eine Nullstelle z, falls es ein Intervall $[a,b]$ gibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind *[4 Pkt]*

(1) Die Funktion f besitzt im Intervall $[a,b]$ eine Nullstelle.

(2) $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

(3) Die Funktion f ist auf $[a,b]$ entweder konvex oder konkav.

(4) Es gilt $a - f(a)/f'(a) \in [a,b]$ und $b - f(b)/f'(b) \in [a,b]$.

Zunächst einmal ist die Funktion f stetig und (beliebig oft) differenzierbar mit $f(0) = 0$. Weiterhin gilt, dass *[7 Pkt]*

$$0 \;=\; f'(x) \;=\; \frac{2}{1-x} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 - x \;=\; 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 1$$

mit $f''(1) = -1/2 < 0$. Somit besitzt die Funktion f in $x = 1$ ein lokales Maximum und ist folglich auf dem Intervall $[0,1]$ monoton wachsend und auf dem Intervall $[1,\infty)$ monoton fallend. Da, wie gesagt, f stetig ist und $f(2) \approx 0.197 > 0$ und $f(4) \approx -0.781 < 0$, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass die Funktion f im Intervall $[2,4]$ die erste (und einzige) positive Nullstelle besitzen muß. Zudem ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in [2,4]$. Weiterhin ist die Funktion f auf dem Intervall $[2,4]$ konkav, da $f''(x) < 0$ für alle $x \in [2,4]$. Schließlich gilt $2 - f(2)/f'(2) \approx 2.592 \in [2,4]$ und $4 - f(4)/f'(4) \approx 2.698 \in [2,4]$. Somit sind sämtlich Voraussetzungen des Satzes über die Konvergenz des Newtonverfahrens erfüllt, d.h die Folge $(x_n : n \in \mathbb{N}_0)$ mit $x_0 = 2$ und

$$x_n \;=\; x_{n-1} - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

konvergiert gegen erste positive Nullstelle.

n	x_n	$f(x_n)$
0	2	0.197
1	2.5916	−0.034
2	2.5140	−0.001

Die erste positive Nullstelle ist somit näherungsweise gegeben durch $z \approx 2.5140$.

c) Das zweite Taylorpunkt $T_2 f(x;2)$ von f an der Stelle 2 ist gegeben durch *[5 Pkt]*

$$\begin{aligned} T_2 f(x;2) \;&=\; f(2) + \frac{f'(2)}{1!}\,(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}\,(x-2)^2 \\ &=\; 2\ln(3) - 2 - \frac{1}{3}\,(x-2) - \frac{1}{9}\,(x-2)^2 \\ &=\; -\frac{1}{9}\,x^2 + \frac{1}{9}\,x - \frac{16}{9} + 2\ln 3. \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $T_2 f(x;2)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} 0 \;=\; T_2 f(x;2) \qquad &\Longleftrightarrow \qquad 0 \;=\; x^2 - x + 16 - 18\ln 3 \\ &\Longleftrightarrow \qquad x_{1/2} \;=\; \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 16 + 18\ln 3} \;\approx\; 0.5 \pm 2.006, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion $T_2 f(x;2)$ besitzt eine negative und eine positive Nullstelle, wobei letztere durch $x = 2.506$ gegeben ist.

4. (Differentiation und implizite Funktionen) *[20 Pkt]*

a) Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 eine rechtsseitige Ableitung, falls folgender Grenzwert existiert *[4 Pkt]*

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Als Beispiel für eine Funktion die an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar ist, ist die Funktion $f(x) = |x|$, denn es gilt

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) \;=\; \lim_{x \searrow 0} x \;=\; 0 \;=\; f(0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) \;=\; \lim_{x \nearrow 0} -x \;=\; 0 \;=\; f(0),$$

d.h. f ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \;=\; \lim_{h \searrow 0} \frac{|h|}{h} \;=\; \lim_{h \searrow 0} \frac{h}{h} \;=\; \lim_{h \searrow 0} 1 \;=\; 1$$

sowie

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \;=\; \lim_{h \nearrow 0} \frac{|h|}{h} \;=\; \lim_{h \nearrow 0} \frac{-h}{h} \;=\; \lim_{h \nearrow 0} -1 \;=\; -1.$$

Da die rechtsseitige und linksseitige Ableitung nicht übereinstimmen, ist die Funktion f somit im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

b) Im folgenden soll das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = |x^2 - 2|$ untersucht werden. Zunächst einmal ist die Funktion f stetig. Da weiterhin gilt, dass $x^2 - 2 = 0$ genau dann, wenn $x = \pm\sqrt{2}$ ist, kann die Funktion f auch folgendermaßen dargestellt werden. *[6 Pkt]*

$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 - 2, & x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty) \\ -x^2 + 2 & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}.$$

Die Funktion f ist zudem für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) \;=\; 2x \qquad \text{und} \qquad f''(x) \;=\; 2$$

für $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ und

$$f'(x) \;=\; -2x \qquad \text{und} \qquad f''(x) \;=\; -2$$

für $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Da $f''(x) = 2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, ist f auf dem Intervall $(-\infty, -\sqrt{2})$ sowie auf dem Intervall $(\sqrt{2}, \infty)$ (strikt) konvex. Für alle $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ist $f''(x) = -2 \leq 0$. Somit ist die Funktion f auf diesem Intervall (strikt) konkav.

c) Die Funktion $y = y(x)$ sei implizit gegeben durch die Lösung der Gleichung [*10Pkt*]

$$f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^x \cos y \;=\; 0.$$

Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion f sind gegeben durch

$$\partial_x f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^x \cos y \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^x \sin y.$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen gilt

$$\partial_x \partial_x f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^x \cos y \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_y f(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^x \cos y$$

sowie

$$\partial_y \partial_x f(x,y) \;=\; -\mathrm{e}^x \sin y \;=\; \partial_x \partial_y f(x,y)$$

Die erste Ableitung der Funktion y ist somit gegeben durch

$$y'(x) \;=\; -\frac{\partial_x f(x,y)}{\partial_y f(x,y)} \;=\; \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Für die zweiten Ableitung der Funktion y ergibt sich

$$\begin{aligned} y''(x) \;&=\; -\frac{-(\sin y)^2 \cdot y'(x) - (\cos y)^2 \cdot y'(x)}{(\sin y)^2} \\ &=\; \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{(\sin y)^2}\, y'(x) \;=\; -\frac{1}{(\sin y)^2} \cdot \frac{\cos y}{\sin y} \;=\; -\frac{\cos y}{(\sin y)^3}, \end{aligned}$$

wobei im dritten Schritt benutzt wurde, dass $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ ist.

5. (lokale und globale Extrema) [*20 Pkt*]

a) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ besitzt an der Stelle x_0 ein lokales, isoliertes Maximum, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass $f(y) < f(x_0)$ für alle $y \in U(x_0) \setminus \{x_0\}$. Der Unterschied zwischen einem lokalen Maximum und einem lokalen, isolierten Maximum ist, dass es in der Umgebung $U(x_0)$ um den Punkt x_0 Punkte geben kann, die auf der gleichen Höhe wie das Maximum liegen. [*4 Pkt*]

Ein Beispiel für eine Funktion, die an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokales, aber kein isoliertes lokales Maximum besitzt, ist die Funktion $f(x,y) = -x^2$, da f in y-Richtung konstant ist.

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = -x^4 + x^2 y + 2y^2$. Die ersten partiellen Ableitungen der Funktion f sind gegeben durch [*10Pkt*]

$$\partial_x f(x,y) \;=\; -4x^3 + 2xy \qquad \text{und} \qquad \partial_y f(x,y) \;=\; x^2 + 4y.$$

Für die zweiten partiellen Ableitungen gilt

$$\partial_x \partial_x f(x,y) \;=\; -12x^2 + 2y, \qquad \text{und} \qquad \partial_y \partial_y f(x,y) \;=\; 4$$

sowie

$$\partial_x \partial_y f(x,y) \;=\; 2x \;=\; \partial_y \partial_x f(x,y).$$

Der Gradient und die Hessematrix der Funktion f sind somit gegeben durch

$$\nabla f(x,y) \;=\; (-4x^3 + 2xy, x^2 + 4y), \qquad \operatorname{Hess} f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} -12x^2 + 2y & 2x \\ 2x & 4 \end{pmatrix}.$$

Im folgenden soll die Funktion f auf Extrema im Inneren der Menge D untersucht werden. Aus dem notwendigen Kriterium für Exrema von differenzierbaren Funktionen ergibt sich

$$0 \;=\; \nabla f(x,y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \;=\; 4x^3 + 2xy \quad \wedge \quad 0 \;=\; x^2 + 4y.$$

Durch Auflösen der zweiten Gleichung nach $y = -x^2/4$ und Einsetzen in die erste Gleichung erhält man

$$0 \;=\; 4x^3 - \frac{1}{2}x^3 \quad \wedge \quad y \;=\; -\frac{x^2}{4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \;=\; \frac{7}{2}x^3 \quad \wedge \quad y \;=\; -\frac{x^2}{4},$$

d.h. die Funktion f besitzt nur im Punkt $(0,0)$, der zudem in der Menge D liegt, einen kritischen Punkt mit $f(0,0) = 0$. Weiterhin gilt

$$\operatorname{Hess} f(0,0) \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinaten von Hess $f(0,0)$ verschwindet, läßt sich der kritische Punkt an der Stelle $(0,0)$ nicht weiter klassifizieren.

Im folgenden soll nun das Extremum der Funktion f auf dem Rand der Menge D, d.h. unter der Nebenbedingung $-x + 2y = 0$, bestimmt werden. Durch Auflösen der Nebenbedingung nach $x = 2y$ und Einsetzen in die Funktion f ergibt sich *[6 Pkt]*

$$F(y) \;=\; f(2y,y) \;=\; -16y^4 + 4y^3 + 2y^2.$$

Somit genügt es die Funktion F auf Extrema zu untersuchen. Die ersten beiden Ableitungen der Funktion F sind gegeben durch

$$F'(y) \;=\; -64y^3 + 12y^2 + 4y \qquad \text{und} \qquad F''(y) \;=\; -192y^2 + 24y + 4$$

Aus dem notwendigen Kriterium für differenzierbare Funktionen ergibt sich

$$0 \;=\; F'(y) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \;=\; y(-16y^2 + 3y + 1)$$

Da aber

$$0 \;=\; -16y^2 + 3y + 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y_{1/2} \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{73}}{32}$$

besitzt die Funktion F somit drei kritische Stellen, nämlich

$$y_1 \;=\; 0 \quad \vee \quad y_2 \;=\; \frac{3 - \sqrt{73}}{32} \;\approx\; -0.173 \quad \vee \quad y_3 \;=\; \frac{3 + \sqrt{73}}{32} \;\approx\; 0.361.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in die zweite Ableitung von F erhält man

$$F''(y_1) \;=\; 4 \;>\; 0, \qquad F''(y_2) \;\approx\; -5.9 \;<\; 0 \quad \text{und} \quad F''(y_3) \;\approx\; -12.4 \;<\; 0.$$

Aus dem hinreichenden Kriterium für Extrema von differenzierbaren Funktionen ergibt sich daher, dass die Funktion F an der Stelle y_1 ein lokales Minimum mit $F(y_1) = 0$ und an den Stellen y_2 und y_3 lokale Maxima besitzt mit $F(y_2) = 0.025$ und $F(y_3) = 0.177$.