Institut für Mathematik
Wintersemester 2014/15
Martin Slowik

Technische Universität Berlin

Probeklausur zur „Mathematik I für Ökonomen"

Bitte diese Felder in Druckschrift ausfüllen

Name:		Vorname:	
Matrikelnr.:		Studiengang:	

Wichtige Hinweise:

- Dieses Deckblatt ist vollständig ausgefüllt zusammen mit den Lösungen abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist zudem mit Namen und Matrikelnummer zu versehen.
- Bitte den Studentenausweis und einen amtlichen Lichtbildausweis bereithalten!
- Für die Bearbeitung der Klausur haben Sie 120 Minuten Zeit.
- **Als Hilfsmittel ist nur ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner zugelassen!**
- Die Klausur besteht aus 5 Aufgaben.
- Geben Sie immer einen vollständigen und kommentierten Rechenweg an!
- Sie sollten die zentralen Definitionen und Sätze kennen. Längere Formeln, Detailaussagen usw. werden bei Bedarf in der Klausur zur Verfügung gestellt.
- Die Aufgaben dieser Probeklausur sind vom Stil her (aber nicht unbedingt vom Umfang her) ähnlich zu den geplanten Klausuraufgaben.

Diese Felder NICHT ausfüllen:

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Summe**	**Note**
Punkte							

1. (Folgen und Grenzwerte) *[20 Pkt]*

a) Was bedeutet es, dass eine Folge beschränkt ist (Definition)?

Geben Sie eine Folge an, die von unten durch 1 beschränkt ist und konvergiert. Weisen Sie hierbei die Konvergenz der von Ihnen gewählten Folge explizit mittels der ϵ-Definition der Konvergenz nach.

b) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die folgenden Folgen konvergieren und den Grenzwert $1/2$ besitzen.

$$\text{i)}\quad a_n = \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^3 - an^2}{n^2 - 1} \qquad \text{ii)}\quad a_n = \sqrt{n + a\sqrt{n}} - \sqrt{n} \qquad \text{iii)}\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} a^k$$

c) Gegeben sei die rekursive Folge

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{a_n + 1}\right).$$

Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass gilt

$$a_n \geq a_{n+1} \qquad \text{und} \qquad a_n \geq 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Folgern Sie daraus die Konvergenz der Folge und bestimmen Sie den Grenzwert.

2. (Stetigkeit und Grenzwerte von Funktionen) *[20 Pkt]*

a) Was bedeutet es, dass eine Funktion an der Stelle x_0 eine Unstetigkeitsstelle 2. Art mit Vorzeichenwechsel besitzt (Definition)?

Geben Sie eine Funktion an, die im Punkt $x_0 = 0$ eine Unstetigkeitsstelle 2. Art mit Vorzeichenwechsel besitzt und weisen Sie diese Eigenschaft an der von Ihnen gewählten Funktion explizit nach, indem Sie sowohl den links- als auch den rechtsseitigen Grenzwert explizit bestimmen.

b) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen an der gegeben Stelle x_0. Benennen Sie die Art der Unstetigkeitsstelle.

$$\text{i)}\quad f(x) = \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{2}}{x^2 - 25}, \quad x_0 = 5 \qquad \text{ii)}\quad f(x) = \frac{4|x| + 4x}{x}, \quad x_0 = 0.$$

c) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die folgende Funktion h stetig ist.

$$h(x) = \begin{cases} (1-x)\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \neq 1 \\ 3 + a, & x = 1 \end{cases}$$

3. (Newtonverfahren und Taylorentwicklung) *[20 Pkt]*

Gegeben sei die Funktion $f\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) \;=\; 2\ln(1+x) - x.$$

a) Berechnen Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktion f.

b) Geben Sie die Voraussetzungen an, die ein Intervall $[a,b]$ erfüllen muss, damit das Newtonverfahren gegen die Nullstelle $z \in [a,b]$ konvergiert.

Bestimmen Sie ein geeignetes Intervall $[a,b]$, dass die erste positive Nullstelle der gegebenen Funktion f enthält. Überpüfen Sie explizit, ob dieses Intervall die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes des Newtonverfahrens erfüllt.

Berechnen Sie anschließend zwei Iterationsschritte des Newtonverfahrens.

c) Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom $T_2 f(x;2)$ von f an der Stelle 2 und berechnen Sie die erste positive Nullstelle von $T_2 f(x;2)$.

4. (Differentiation und implizite Funktionen) *[20 Pkt]*

a) Was bedeutet es, dass eine Funktion f an der Stelle x_0 eine rechtsseitige Ableitung besitzt (Definition)?

Geben Sie eine Funktion an, die an der Stelle $x_0 = 0$ stetig aber nicht differenzierbar ist und weise Sie diese Eigenschaften an der von Ihnen gewählten Funktion explizit nach, indem Sie die links- als auch die rechtsseitige Grenzwert bzw. Ableitung bestimmen.

b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion $f(x) = |x^2 - 2|$. Geben Sie jeweils die Intervalle an, auf denen die Funktion f konvex bzw. konkav ist.

c) Die Funktion $y = y(x)$ sei implizit gegeben durch die Lösung der Gleichung

$$f(x,y) \;=\; \mathrm{e}^x \cos y \;=\; 0.$$

Bestimmen Sie sämtliche ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f.

Berechnen Sie die erste Ableitung der Funktion y.

Zeigen Sie, dass die zweite Ableitung der Funktion y gegeben ist durch

$$y''(x) \;=\; -\frac{\cos y}{(\sin y)^3}.$$

5. (lokale und globale Extrema) *[20 Pkt]*

a) Gegen sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Was versteht man unter einem lokalen, isolierten Maximum der Funktion f an der Stelle x_0 (Definition)? Was ist der Unterschied zwischen einem lokalen und einem lokalen, isolierten Maximum?

Geben Sie eine Funktion an, die an der Stelle $x_0 = 0$ ein lokalen Maximum besitzt, dass aber kein isoliertes lokales Maximum ist (Begründung!)

b) Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = -x^4 + x^2 y + 2y^2$.

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix der Funktion f.

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion f auf der Menge

$$D \;=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -x + 2y \geq 0\big\}.$$