Klausur A

Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dr. G. dos Reis

Wintersemester 2011/12
01. März 2012

Klausur
Mathematik I für Wirtschaftswissenschaftler

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Zur Klausur sind, bis auf einen nicht-programmierbaren Taschenrechner, Stifte und ein einseitig handbeschriebenes A4-Formelblatt keine anderen Hilfsmittel zugelassen. Handys sind auch verboten! *Eine Zuwiderhandlung ist ein Betrugsversuch.*

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** bzw. **eine Begründung** an.

Mit **Bleistift** oder **Rotstift** geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie alle beschriebenen Blätter, auch Schmierzettel, ab!

Nicht angemeldete Klausuren gelten als nicht geschrieben und werden nicht korrigiert!

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 50 von 100 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	8	Σ

Klausur Notenschlüssel

“100er Mathe Economics”		
1.0	98-100	Sehr gut
1.3	93-97	
1.7	87-92	Gut
2.0	81-86	
2.3	75-80	
2.7	70-74	Befriedigend
3.0	65-69	
3.3	59-64	
3.7	52-58	Ausreichend
4.0	50-51	
5.0	00-49	Mangelhaft

1. Aufgabe

28 Punkte

Für jede richtige Antwort gibt es 4 Punkte. Für eine falsche Antwort werden von den in dieser Aufgabe erreichten Punkten 2 Punkte abgezogen. Für die Gesamtaufgabe gibt es keine negativen Punkte.

Schreiben Sie Ihre Antworten in die Tabelle unten.

1.1) Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

$$A)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}; \qquad B)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}; \qquad C)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{4}{4}; \qquad D)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{8}{4}$$

1.2) Sei die Punktemenge $M = \{x \in \mathbb{R} : x - x^2 \geq -2\}$. Welche der folgenden Aussagen ist korrekt?

$$A)\ M=\emptyset; \qquad B)\ M=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty); \qquad C)\ M=[-1,2]; \qquad D)\ M=(-1,2)$$

1.3) Sei g eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$ so dass $g(2) = 0$ und $g'(2) = 2$ gilt. Welches der folgenden Polynome ist das Taylor-Polynom erster Ordnung von g am Entwicklungspunkt $x_0 = 2$?

$$A)\ T_{1,g}(x)=\frac{2x}{2!}; \qquad B)\ T_{1,g}(x)=2x; \qquad C)\ T_{1,g}(x)=(x-2)x; \qquad D)\ T_{1,g}(x)=2x-4$$

1.4) Sei $h(x,y) = \dfrac{e^{x+y^2}}{x^2+y}$. Was ist der Gradient ∇h an der Stelle $(x,y) = (0,1)$?

$$A)\ \nabla h(0,1)=(e,e); \qquad B)\ \nabla h(0,1)=(0,e); \qquad C)\ \nabla h(0,1)=(e,0); \qquad D)\ \nabla h(0,1)=(0,0)$$

1.5) Welche der folgenden Aussagen gilt *nicht* für alle $x, y, a \in (0,+\infty)$ und $m \in \mathbb{N}$?

$$A)\ x^m y^m=(xy)^m; \qquad B)\ \log_a(x^m)=\frac{\log_a(x^m)}{\log_a(a)}; \qquad C)\ \ln(x)-\ln(y)=\ln(xy); \qquad D)\ y\ln(x)=\ln(x^y)$$

1.6) Wenn $\sum_{k=1}^{4}(0{,}4)^k = 0{,}6496$ gilt, wie viel ist $\sum_{k=5}^{\infty}(0{,}4)^k$?

$A)$ $+\infty$ (Reihe divergent); $B)$ $\approx 1{,}0170667$; $C)$ $\approx 0{,}0170667$; $D)$ $\approx 1{,}6666667$;

1.7) Sei $f(x,y)$ eine zweimal stetige differenzierbare Funktion wobei für (x^*,y^*) gilt:

$$\nabla f(x^*,y^*)=0, \qquad \partial_{xx}f(x^*,y^*)=5 \quad \text{und} \quad \partial_{yy}f(x^*,y^*)=5.$$

Welche der folgenden Aussagen ist korrekt? Der Punkt (x^*,y^*) ist

$A)$ lok. Min; $B)$ Sattelpunkt; $C)$ lok. Max; $D)$ man kann nichts sagen;

Aufgabe	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
Antwort:							
Korrektur:							
Antwort:	C	C	D	A	C	C	D

2. Aufgabe
11 Punkte

Sie überlegen, Ihr bisher angespartes Kapital von 500 Euro für 20 Jahre bestmöglich anzulegen. Es stehen drei Alternativen zur Auswahl:

▷ Alternative a): Ein Tagesgeldkonto bei einer sicheren Bank, Zinsen (+Zinseszinsen) von 4% pro Jahr garantiert.

▷ Alternative b): Ein windiges Anlagegeschäft in Portugal, 8% Zinsen pro Jahr (+Zinseszinsen), aber nach 20 Jahren werden nur 50% des Guthabens auf dem Konto ausbezahlt.

▷ Alternative c): Eine Festanlage bei einer Person Ihres Vertrauens (Luigi Calzone), die Ihnen nach 20 Jahren sicher 1100 Euro ausbezahlt.

2.1) Berechnen Sie den Wert der drei Anlage-Alternativen nach 20 Jahren (also den Betrag, der Ihnen ausbezahlt wird) und bestimmen Sie, welche die beste Alternative ist.

2.2) Eine griechische Bank bietet jetzt ein Tagesgeldkonto mit 10% Zinsen pro Jahr garantiert an. Nach wievielen Jahren hat man so viel Geld auf dem griechischen Tagesgeldkonto wie bei der besten Alternative oben nach 20 Jahren? (Der Bankrott von Griechenland ist keine gültige Antwort!)

Lösung von Aufgabe 2:

2.1) Wir benutzen die Zinseszinsformel: $K_n = K_0(1+r)^n$.

$$\begin{aligned} a) K_{20}^a &= 500 \cdot (1+0.04)^{20} = 1095.56\ldots, \\ b) K_{20}^b &= 0.5 \cdot 500 \cdot (1+0.08)^{20} = 1165.24\ldots, \\ c) K_{20}^c &= 1100 \end{aligned}$$

Die beste Alternative ist die zweite Alternative, K_{20}^b.

2.2) Die beste Möglichkeit oben war Alternative b), nämlich $K_{20}^b \approx 1165.24$. Hier muss man die Zinseszinsformel nach n auflösen:

$$K_n = 500(1+0.1)^n = 1165.24 \;\Leftrightarrow\; n = \frac{\ln\left(\frac{1165.24}{500}\right)}{\ln(1.1)} \approx 8.877$$

---

3. Aufgabe
7 Punkte

Beweisen Sie per vollständiger Induktion, dass

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gilt. Geben Sie deutlich die drei Induktionsschritte an.

Lösung von Aufgabe 3:

Beweis per vollständiger Induktion:

▷ **1. Induktionsanfang:** Für $n = 1$:

$$\sum_{j=1}^{1} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{1+1} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{1\cdot(1+1)} = 1 - \frac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Also gilt die Gleichung für $n = 1$.

▷ **2. Induktionsvoraussetzung (I.V.):** Es existiert ein $n \in \mathbb{N}, n > 1$, so dass für alle natürlichen Zahlen größer 1 und kleiner gleich n die Aussage erfüllt ist.

▷ **3. Induktionsschluss:** Zeige nun den Schluss von n auf $n+1$, d.h. mit Hilfe der **I.V.**

$$\boxed{\textbf{zu zeigen:} \qquad \textstyle\sum_{j=1}^{n+1} \dfrac{1}{j(j+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+2}}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{j(j+1)} &= \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}\Big) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{Anwendung der I.V.} \\
&= 1 + \frac{-n-2+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{-n-1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+2)}. \qquad \text{Fertig!}
\end{aligned}$$

---

4. Aufgabe

12 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$a) \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x-1}{x^2}, \qquad b) \lim_{x\to5^+} \frac{(x-5)+\ln(x)}{(5-x)^3}, \qquad c) \lim_{x\to-1^+} (x+1)\ln(x+1)$$

Lösung von Aufgabe 4:

4.a) Hier kann man x ausklammern oder L'Hospital benutzen, weil dieser Grenzwert die Form $\frac{\infty}{\infty}$ hat:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x-1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4(1+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4})}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = +\infty$$

4.b) Dies ist ein Grenzwert der Form $\frac{1}{0}$, aber $\frac{1}{0}$ ist keine unbestimmte Form. Alle Grenzwerte der Form $\frac{1}{0}$ sind $\pm\infty$, man muss nur das Vorzeichnen bestimmen.

$$\lim_{x\to5^+} \frac{(x-5)+\ln(x)}{(5-x)^3} = \frac{(5^+-5)+\ln(5^+)}{(5-5^+)^3} = \frac{0^+ + \ln(5^+)}{(0^-)^3} = \frac{\ln(5^+)}{0^-} = -\infty$$

4.c) Hier muss man L'Hospital benutzen, aber es ist nicht direkt. Der Grenzwert hat die Form $0 \times \infty$ und man muss $(x+1)\ln(x+1)$ in einer neuen Form darstellen, so dass der Grenzwert die Form $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ hat:

$$\lim_{x\to-1^+} (x+1)\ln(x+1) = \lim_{x\to-1^+} \frac{\ln(x+1)}{\frac{1}{x+1}} \overset{\text{L'H.}}{=} \lim_{x\to-1^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{-1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to-1^+} -(x+1) = 0$$

---

5. Aufgabe

13 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 - 4x^3$.

5.a) Sei f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Existieren dann globales Minimum und Maximum von f? Wenn ja, berechnen Sie diese.

5.b) Sei stattdessen f nur auf dem Intervall $[1, 6]$ definiert. Existieren dann globales Minimum und Maximum von f? Wenn ja, berechnen Sie diese ebenfalls.

Lösung von Aufgabe 5:

5.a)

- Ableitungen:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2; \qquad f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x; \qquad f''(x) = 12x^2 - 24x - 16;$$

- Kandidaten:

$$\begin{aligned} &f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^3 - 12x^2 - 16x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x(x^2 - 3x - 4) = 0 \\ &x = 0 \ \text{ o. } \ x = -1 \ \text{ o. } x = 4. \end{aligned}$$

- Zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} f''(-1) = +20 > 0 &\quad \Rightarrow \text{lokales Minimum} \quad f(-1) = -3 \\ f''(0) = -16 < 0 &\quad \Rightarrow \text{lokales Maximum} \quad f(0) = 0 \\ f''(4) = +80 > 0 &\quad \Rightarrow \text{lokales Minimum} \quad f(4) = -128 \end{aligned}$$

- Globales Verhalten: Grenzwerte von f für $x \to \pm\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} x^4 - 4x^3 - 8x^2 = \lim_{x \to +\infty} x^4 (1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}) = +\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} x^4 - 4x^3 - 8x^2 = \lim_{x \to -\infty} x^4 (1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2}) = +\infty \end{aligned}$$

  Es gibt kein globales Maximum, aber es gibt ein globales Minimum und $f(4) < f(-1) < f(0)$.

- **Antwort:** Es gibt kein globales Maximum. Es gibt ein globales Minimum für $x = 4$.

5.b) Wenn $x \in [1, 6]$ dann ist, die einzige Extremstelle von f der Punkt $x = 4$ mit $f(4) = -128$, die ein globales Minimum ist. Auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen gibt es immer ein globales Maximum und Minimum. Wir müssen die Randpunkte untersuchen:

- Randpunkte: Die Randpunkte sind $x = 1$ und $x = 6$. Also, $f(1) = -11$ und $f(6) = 144$.
- Vergleich: Wir haben $f(4) < f(1) < f(6)$ und das bedeutet: $x = 4$ ist ein globales Minimum, $x = 6$ ist ein globales Maximum und $x = 1$ ist ein lokales Maximum.
- **Antwort:** An der Stelle $x = 4$ gibt es ein globales Minimum.
  An der Stelle $x = 6$ gibt es ein globales Maximum.

---

6. Aufgabe

11 Punkte

Bestimmen Sie von der Funktion

$$f(x,y) := \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 4xy + 1$$

die lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte.

Lösung von Aufgabe 6: Die ersten Ableitungen sind

$$\partial_x f(x,y) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y = x^2,$$
$$\partial_y f(x,y) = 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = y^2,$$

Wir setzen die $y = x^2$ in die 2-te Gleichung ein,

$$x = (x^2)^2 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \text{ und } x = 1.$$

Als Nullstellen kriegen wir: $(x,y) = (0,0)$ und $(x,y) = (1,1)$ Die zweiten Ableitungen und damit die Hessematrix sind

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 8x & -4 \\ -4 & 8y \end{bmatrix}$$

In den 2 Kandidaten ist H_f

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \det\Big(H_f(0,0)\Big) = -16 < 0 \Rightarrow \text{ Sattelpunkt}$$

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}, \det\Big(H_f(1,1)\Big) = 48 > 0, \text{ und } \partial_{xx} f(1,1) = 8 > 0 \Rightarrow \text{ Lok. Min.}$$

---

7. Aufgabe

13 Punkte

Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y = 1$ mit Hilfe der Lagrange Methode.

Berechnen Sie die lokalen Bedingungen zweiter Ordnung $D(x,y)$ und entscheiden Sie, ob es sich bei der Extremwerte um Minima oder Maxima handelt.

Lösung von Aufgabe 7:

Sei $g(x,y) = x^2 + y - 1$, dann ist die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 + y - 1).$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_x \mathcal{L}(x,y) & = 0 \\ \partial_y \mathcal{L}(x,y) & = 0 \\ g(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x + \lambda 2x & = 0 \\ 4y + \lambda & = 0 \\ x^2 + y - 1 & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x(1+\lambda) & = 0 \\ y & = -\frac{\lambda}{4} \\ x^2 + y - 1 & = 0 \end{array}\right.$$

Aus der ersten Zeile folgt, $x = 0$ oder $\lambda = -1$

- $x = 0 \qquad \Rightarrow y = 1, \qquad \Rightarrow \lambda = -4$
  - Kandidaten: $(\lambda, x, y) = (-4, 0, 1)$
- $\lambda = -1 \qquad \Rightarrow y = -\frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \qquad \Rightarrow x^2 = 1 - y = 1 - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - Kandidaten: $(\lambda, x, y) = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$ und $(\lambda, x, y) = (-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$

Wir haben:

$$f(0,1) = 2, \qquad f(+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}) = \frac{7}{8} = f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}).$$

Welche sind Maxima und Minima?

Wir müssen die lokalen Bedingungen zweite Ordnung, also $D(x, y)$ berechnen:

$$D(x, y) = (2 + 2\lambda) \cdot 1^2 - 0 + 4 \cdot (2x)^2 = 2 + 2\lambda + 16x^2.$$

Für $(\lambda, x, y) = (-1, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$ ist $D(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}) = 12 > 0$, also $(x, y) = (\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4})$ sind die Minima.

Für $(\lambda, x, y) = (-4, 0, 1)$ ist $D(0, 1) = -6 < 0$, also $(x, y) = (0, 1)$ ist das Maximum.

---

8. Aufgabe

5 Punkte

Betrachten Sie das folgende Problem:

$$\text{Maximiere } f\left(x, y\right) = 10x^2 + 20y^2$$

unter den Nebenbedingungen $x \geq 0$, $y \geq 1$ und $6x \leq 100 - 8y$.

Um ein solches Problem zu lösen benutzt man die KKT-Methode.

Geben Sie das Gleichungs-/Ungleichungssystem an, das man benutzen muss um das Maximierungsproblem zu lösen. Das System Selbst ist nicht zu lösen.

Lösung von Aufgabe 8: Wir gehen zuerst von einem Maximierungs-Problem zu einem Minimierungs-Problem über.

Wir schreiben alle Nbb als "kleiner gleich Null":

$$-x \leq 0, \quad -y + 1 \leq 0 \quad \text{und} \quad 6x + 8y - 100 \leq 0.$$

Wir haben 3 Nbb und deswegen brauchen wir 3 Lagrange Multiplikatoren. Die Lagrange Funktion ist folgende:

$$\mathcal{L} = -10x^2 - 20y^2 + \lambda_1(-x) + \lambda_2(-y + 1) + \lambda_3(6x + 8y - 100).$$

$$\left\{\begin{array}{ccc} \partial_x\mathcal{L} & = & 0 \\ \partial_y\mathcal{L} & = & 0 \\ -x & \leq & 0 \\ -y+1 & \leq & 0 \\ 6x+8y-100 & \leq & 0 \\ \lambda_1(-x) & = & 0 \\ \lambda_2(-y+1) & = & 0 \\ \lambda_3(6x+8y-100) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cc} -20x - \lambda_1 + 6\lambda_3 & = 0 \\ -40y - \lambda_2 + 8\lambda_3 & = 0 \\ x & \geq 0 \\ y & \geq 1 \\ 6x + 8y & \leq 100 \\ \lambda_1 = 0 \ \text{ oder } \ x = 0 & \\ \lambda_2 = 0 \ \text{ oder } \ y = 1 & \\ \lambda_3 = 0 \ \text{ oder } \ 6x + 8y = 100 & \end{array}\right.$$
