Technische Universität Berlin Wintersemester 2004/2005

Fakultät II; Institut für Mathematik

Prof. Dr. G. Bärwolff/C. Mense 17.02.2005

Lösung zur Klausur zur LV Numerik für Informatiker

Aufgabe 1

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 25 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) Prüfen Sie die Voraussetzungen, ob A eine Cholesky-Zerlegung besitzt und bestimmen Sie diese. **4 Pkt.**

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der errechneten Cholesky-Zerlegung von A. **2 Pkt.**

Lösung:

a) **Voraussetzungen prüfen:**

Eine Matrix besitzt eine Cholesky-Zerlegung, wenn sie symmetrisch und positiv definit ist.

Hier ist A sicher symmetrisch. Als Test, ob A auch positiv definit ist, reicht es damit zu überprüfen, ob die Determinaten der Hauptabschnittsmatrizen positiv sind:

$$\det(\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}) = 1 \qquad \det(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 25 \end{pmatrix}) = 16 \qquad \det(\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 25 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}) = 64$$

Somit ist A symmetrisch positiv definit und besitzt eine Cholesky-Zerlegung.

Cholesky-Zerlegung:

Da

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 25 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}}_{=L^T}$$

gelten soll, ergibt sich somit durch $a_{ij} = \sum_{k=1}^{3} l_{ik} l_{jk}$ die Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & l_{11} * l_{11} + 0 * 0 + 0 * 0 & \Rightarrow l_{11} = \sqrt{1} = 1 \\ -3 & = & 1 * l_{21} + 0 * l_{22} + 0 * 0 & \Rightarrow l_{21} = -3 \\ 0 & = & 1 * l_{31} + 0 * l_{32} + 0 * l_{33} & \Rightarrow l_{31} = 0 \\ 25 & = & (-3) * (-3) + l_{22} * l_{22} + 0 * 0 & \Rightarrow l_{22} = \sqrt{16} = 4 \\ 4 & = & (-3) * 0 + 4 * l_{32} + 0 * l_{33} & \Rightarrow l_{32} = 1 \\ 5 & = & 0 * 0 + 1 * 1 + l_{33} * l_{33} & \Rightarrow l_{33} = \sqrt{4} = 2 \end{array}$$

Somit lautet die Cholesky-Zerlegung:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Als Lösung des linearen Gleichungssystems erhält man aus

$$Ax = b \Rightarrow LL^T x = b \Rightarrow Ly = b \text{ und } L^T x = y$$

schließlich mittels Vorwärts- bzw. Rückwärtseinsetzen die Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet also $x = \begin{pmatrix} 1, 0, 1 \end{pmatrix}^T$.

Aufgabe 2

Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 200 & c \\ 200 & 200 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 700 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei sei $0 < c < 200$.

a) Bestimmen Sie die Konditionszahl von A in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm in Abhängigkeit von c. **4 Pkt.**

b) Es soll das Gleichungssystem $Ax = b$ gelöst werden. Wie groß darf c maximal sein, damit ein relativer Fehler in b um nicht mehr als den Faktor 10 verstärkt wird? Begründen Sie ihre Antwort. **2 Pkt.**

Lösung:

a) Es gilt die Formel:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$A^{-1} = \frac{1}{200^2 - 200c} \begin{bmatrix} 200 & -c \\ -200 & 200 \end{bmatrix},$$

wobei dies wohldefiniert ist, da $200^2 - 200c \neq 0$ ist, wegen $0 < c < 200$.

Es ist

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\{400, 200 + c\} = 400 \\ \|A^{-1}\|_\infty &= \frac{1}{200^2 - 200c} \max\{400, 200 + c\} = \frac{400}{200^2 - 200c} = \frac{2}{200 - c}, \end{aligned}$$

da $0 < c < 200$ ist und somit ist $200 + c < 400$ und $200^2 - 200c > 0$.

Also ist

$$cond_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 400 \frac{2}{200 - c} = \frac{800}{200 - c}.$$

b) Es gilt die Formel

$$\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \mathrm{cond}_\infty(A) \frac{||\delta b||_\infty}{||b||_\infty}.$$

Damit also ein relativer Fehler in b um nicht mehr als den Faktor 10 verstärkt wird, muss also

$$cond_\infty(A) \leq 10$$

sein.

$$cond_\infty(A) = \frac{800}{200 - c} \leq 10 \Leftrightarrow 80 \leq 200 - c \Leftrightarrow -120 \leq -c \Leftrightarrow c \leq 120$$

Somit darf c nicht größer als 120 sein.

Aufgabe 3

Gegeben seien die Stützpunkte $(0, 1)$, $(1, 4)$ und $(3, 10)$.

a) Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom mit Hilfe der Lagrange-Polynome und geben Sie es in der Form $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ an. **4 Pkt.**

b) Welches Interpolationspolynom ergibt sich, wenn man den Stützpunkt $(1, 4)$ weglässt? Vergleichen Sie dieses Polynom mit dem aus Teil a) und begründen Sie das Ergebnis. **2 Pkt.**

Lösung:

a) Die Lagrange-Polynome sind definiert durch

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \, .$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 1}}^{3} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x-1}{0-1} \cdot \frac{x-3}{0-3} = \frac{x^2 - 4x + 3}{3} \\
L_2(x) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{3} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x-0}{1-0} \cdot \frac{x-3}{1-3} = \frac{x^2 - 3x}{-2} \\
L_3(x) &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 3}}^{3} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x-0}{3-0} \cdot \frac{x-1}{3-1} = \frac{x^2 - x}{6}
\end{aligned}$$

Das Interpolationspolynom erhält man durch

$$p(x) = \sum_{j=1}^{3} y_j L_j(x) = 1 \frac{x^2 - 4x + 3}{3} + 4 \frac{x^2 - 3x}{-2} + 10 \frac{x^2 - x}{6} = 3x + 1 \, .$$

b) Man erhält wieder das Interpolationspolynom $p(x) = 3x + 1$.

Da in dieser Teilaufgabe nur zwei Punkte gegeben sind, ist das Interpolationspolynom vom Grad 1, also eine Gerade. Da aber in Teil a) für die gegeben drei Punkte bereits ein Interpolationspolynom vom Grad 1 ermittelt wurde, erhält man somit das gleiche Interpolationspolynom, wenn man nur einen Punkt weglässt.

Aufgabe 4

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y''(t) = t^2 y'(t) + 2y(t), \quad y(t_0) = \nu_0, \quad y'(t_0) = \nu_1$.

a) Reduzieren Sie das Anfangswertproblem durch Hinzunahme zusätzlicher Variablen auf ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung. **3 Pkt.**

b) Führen Sie einen Schritt des folgenden Verfahrens durch:

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}(t_k, \vec{y}_k) \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(t_{k+1}, \vec{y}_k + h * \vec{k}_1) \\ \vec{y}_{k+1} &= \vec{y}_k + \frac{h}{2} * \left[\vec{k}_1 + \vec{k}_2\right] \end{aligned} \qquad \textit{(Verfahren von Heun)}$$

Dabei sei $t_0 = 0, h = 1$ und $\nu_0 = \nu_1 = 1$. **3 Pkt.**

Lösung:

a) Mit den Variablen $y_1(t) = y(t)$ und $y_2(t) = y'(t)$ erhält man für $\vec{y} = \binom{y_1}{y_2}$ das folgende System 1. Ordnung:

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}) \quad \text{mit} \quad \vec{f}(t, \vec{y}) = \begin{pmatrix} y_2 \\ t^2 y_2 + 2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

und den Startwert

$$\vec{y}(t_0) = \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \end{pmatrix}.$$

b) Es ist $\vec{y}_1$ gesucht. Gegeben ist $t_0 = 0$ und wegen $\nu_0 = \nu_1 = 1$ ist $\vec{y}_0 = \binom{1}{1}$. Desweiteren ist wegen $h = 1$ somit $t_1 = t_0 + h = 1$

Also liefert das angegebene Verfahren die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &= \vec{f}(t_0, \vec{y}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(t_1, \vec{y}_0 + h * \vec{k}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1^2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \vec{y}_1 &= \vec{y}_0 + \frac{h}{2} * \left[\vec{k}_1 + \vec{k}_2\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zusatzaufgabe

Bestimmen Sie die Ordnung der Approximationen

a) $\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} \approx y'(x)$ **3 Pkt.**

b) $\frac{3y(x)-4y(x-h)+y(x-2h)}{2h} \approx y'(x)$ **3 Pkt.**

D.h. bestimmen Sie das minimale $p \in \mathbb{N}$ mit $\frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h} - y'(x) = O(h^p)$ bzw. $q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{3y(x)-4y(x-h)+y(x-2h)}{2h} - y'(x) = O(h^q)$.

Lösung:

a) Benutze die folgenden Taylorentwicklungen:

$$\begin{array}{rclllll} y(x+h) &=& y(x) & +hy'(x) & +\frac{h^2}{2}y''(x) & +\frac{h^3}{6}y'''(x) & +O(h^4) \\ y(x-h) &=& y(x) & -hy'(x) & +\frac{h^2}{2}y''(x) & -\frac{h^3}{6}y'''(x) & +O(h^4) \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & y(x+h) - y(x-h) \\ = \quad & \left(y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)\right) \\ & - \left(y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)\right) \\ = \quad & 2hy'(x) - \frac{2h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)\ . \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{y(x+h) + y(x-h)}{2h} - y'(x) = -\frac{2h^2}{6}y'''(x) + O(h^3) = O(h^2)\ .$$

Somit ist die Ordnung 2.

b) Benutze die folgenden Taylorentwicklungen:

$$\begin{array}{rclllll} y(x-h) &=& y(x) & -hy'(x) & +\frac{h^2}{2}y''(x) & -\frac{h^3}{6}y'''(x) & +O(h^4) \\ y(x-2h) &=& y(x) & -2hy'(x) & +\frac{4h^2}{2}y''(x) & -\frac{8h^3}{6}y'''(x) & +O(h^4) \end{array}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & 3y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h) \\ = \quad & 3y(x) - 4\left(y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) - \frac{h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)\right) \\ & + \left(y(x) - 2hy'(x) + \frac{4h^2}{2}y''(x) - \frac{8h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)\right) \\ = \quad & 2hy'(x) + \frac{4h^3}{6}y'''(x) + O(h^4)\ . \end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{3y(x) - 4y(x-h) + y(x-2h)}{2h} - y'(x) = \frac{4h^2}{6}y'''(x) + O(h^3) = O(h^2)\ .$$

Somit ist die Ordnung 2.