Name Matr.-Nr. Platznr.

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Die Aufgabe besteht aus vier Fragen.

Beantworten Sie die folgenden Fragen eindeutig mit RICHTIG oder FALSCH. Begründen Sie die Antworten! (Für unbegründete korrekte Antworten gibt es keine Punkte)

1. Wird beim Lotto 6 aus 49 zwei Jahre lang (104 Ziehungen) die Kugel mit der Zahl 13 nicht gezogen aber jedesmal die Kugel mit der Zahl 42, dann ist es aufgrund des Starken Gesetzes der Großen Zahlen wahrscheinlicher die "13" im nächsten Spiel zu ziehen als die "42".

2. Die Kleinste–Quadrate–Schätzung im linearen Regressionsmodell ist eine ML–Schätzung, wenn die Störterme unabhängig identisch normalverteilt sind.

3. Ein approximatives Konfidenzintervall für den Parameter π einer $B(n,\pi)$-verteilten Zufallsvariable ist nicht symmetrisch zum Schätzwert $\widehat{\pi}$, wenn die Binomialverteilung durch eine Normalverteilung approximiert wird.

4. Es seien zehn Bodenproben mit jeweils dem gleichen Schadstoffgehalt μ gegeben. Für eine der zehn Bodenproben werden fünf Messwerte $x_1, \ldots, x_5$ erhoben. Dabei seien die Messungen Realisationen von unabhänigig identisch normalverteilten Zufallsvariablen mit Mittelwert μ und bekannter Varianz σ^2.
Dann garantiert das 90%–Konfidenzintervall $\left[\overline{x} - \tau_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{5}}; \overline{x} + \tau_{0.95}\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right]$ für den Schadstoffgehalt μ basierend auf den 5 Messung der einen Bodenprobe, daß die Aussage "der Schadstoffgehalt liegt im Bereich des 90%–Konfidenzintervalls" für mindestens 9 der 10 Bodenproben richtig ist.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Die Aufgabe besteht aus 3 Teilaufgaben.

In einer Wetterstation werden die Phänomene Frühnebel und Regen beobachtet. Langjährige Untersuchungen haben ergeben, daß es im Schnitt alle drei Tage regnet und jeden zweiten Tag Frühnebel zu beobachten ist. Alle fünf Tage ist im Schnitt sowohl Frühnebel als auch Regen zu beobachten.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens eins der beiden Wetterphänomene an einem Tag zu beobachten ist.
2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß es an einem Tag mit Frühnebel regnet.
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß es an einem Tag ohne Frühnebel regnet.

Aufgabe 3 *(20 Punkte)*

Die Aufgabe besteht aus 4 Teilaufgaben. Optional ist noch eine Zusatzfrage.

Schießt der Bogenschütze Guttreff auf eine Zielscheibe, so ist der Abstand des Treffpunkts vom Scheibenmittelpunkt als stetige reelle Zufallsvariable mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x) & \text{fuer } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

aufzufaßen, wobei c eine geeignet zu wählende Konstante ist.

1. Berechnen Sie die Konstante c.
   (Hinweis: Sollten Sie c nicht berechnen können, dürfen Sie in den weiteren Aufgabenteilen c beibehalten)
2. Wie groß ist der Erwartungswert und wie groß ist die Varianz des Abstandes?
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Abstand
   (a) kleiner als 0,2 ist?
   (b) zwischen 0,1 und 0,2 beträgt?

4. Wie groß ist annähernd die Wahrscheinlichkeit θ, daß von 1000 voneinander unabhängigen Schüssen Guttreffs wenigstens 360 einen Abstand von weniger als 0,2 vom Scheibenmittelpunkt haben.

Zusatzaufgabe (5 Pluspunkte)

Ist $\theta > \frac{1}{2}$ oder $\theta < \frac{1}{2}$? Es genügt eine heuristische Begründung.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Die Aufgabe besteht aus zwei Teilaufgaben.

Um den Benzinverbrauch des Autos der Familie Meyer gibt es Ärger. Vater Meyer behauptet, daß durch die rasante Fahrweise seines Sohnes der Verbrauch pro Kilometer zunimmt. Sohn Meyer ist ganz anderer Meinung und schlägt vor, ein paar Testfahren zu machen. Die allwöchentliche Fahrt zur Großmutter, die 300 Kilometer entfernt wohnt, wird dazu genutzt. Drei Wochen hintereinander wird die Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 100, 110 und 120 km/h zurückgelegt und der Benzinverbrauch festgestellt. Das Resultat ist

	1. Woche	2. Woche	3. Woche	
Durchschnittsgeschwindigkeit	100	110	120	km/h
Benzinverbrauch	49.6	50.2	51.4	Litern pro Fahrt
	8.2	8.3	8.5	Litern pro 100 km

Der Sohn, der sich in statistischen Schlußweisen ein wenig auskennt, paßt folgendes Regressionsmodell an

$$\text{Benzinverbrauch pro Fahrt} = \text{Konstante} + \text{Koeffizient} \cdot \text{Durchschnittsgeschwindigkeit} + \text{Stoerterm}\,.$$

Beide einigen sich darauf, daß die Störterme als unabhängig normalverteilt angesehen werden können. Zusätzlich setzen sie für Ihre Testentscheidungen ein Signifikanzniveau von $\alpha = 10\%$ fest, obwohl sie nicht recht wissen, was das zu bedeuten hat.

1. Erklären Sie Vater und Sohn, was das Signifikanzniveau α in einem Hypothesentest ist.

2. Der Vater will nun mittels eines statistischen Tests die Behauptung seines Sohnes, daß der Benzinverbrauch nicht mit höherer Durchschnittsgeschwindigkeit steigt, widerlegen.

(a) Stellen Sie die Nullhypothese und die Alternative auf.

Sie geben die Werte der Testfahrten in das Programmpaket R ein und erhalten folgendes Ergebnis:

Residual Standard Error	0.2449		
R-Square	0.9643		
F-statistic (df=1, 1)	27	p-value	0.121

	Estimate	Std.Err	t-value	Pr(>|t|)
Intercept	40.50	1.9105	21.1987	0.030
X	0.09	0.0173	5.1962	0.121

(b) Geben Sie den Wert der Prüfgröße und den Ablehnbereich an.

(c) Wie lautet die Testentscheidung?

Name Matr.-Nr. Platznr.

Zu Aufgabe:

Name Matr.-Nr. Platznr.

Zu Aufgabe:

Name Matr.-Nr. Platznr.

Zu Aufgabe: