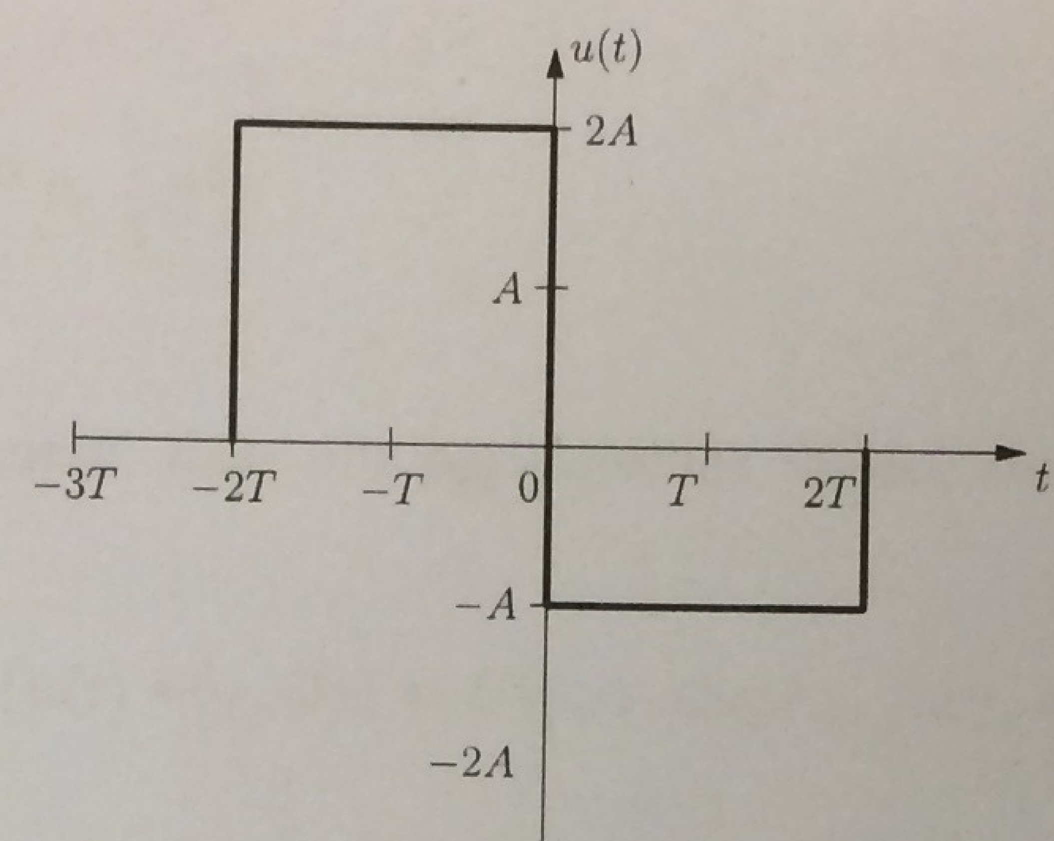
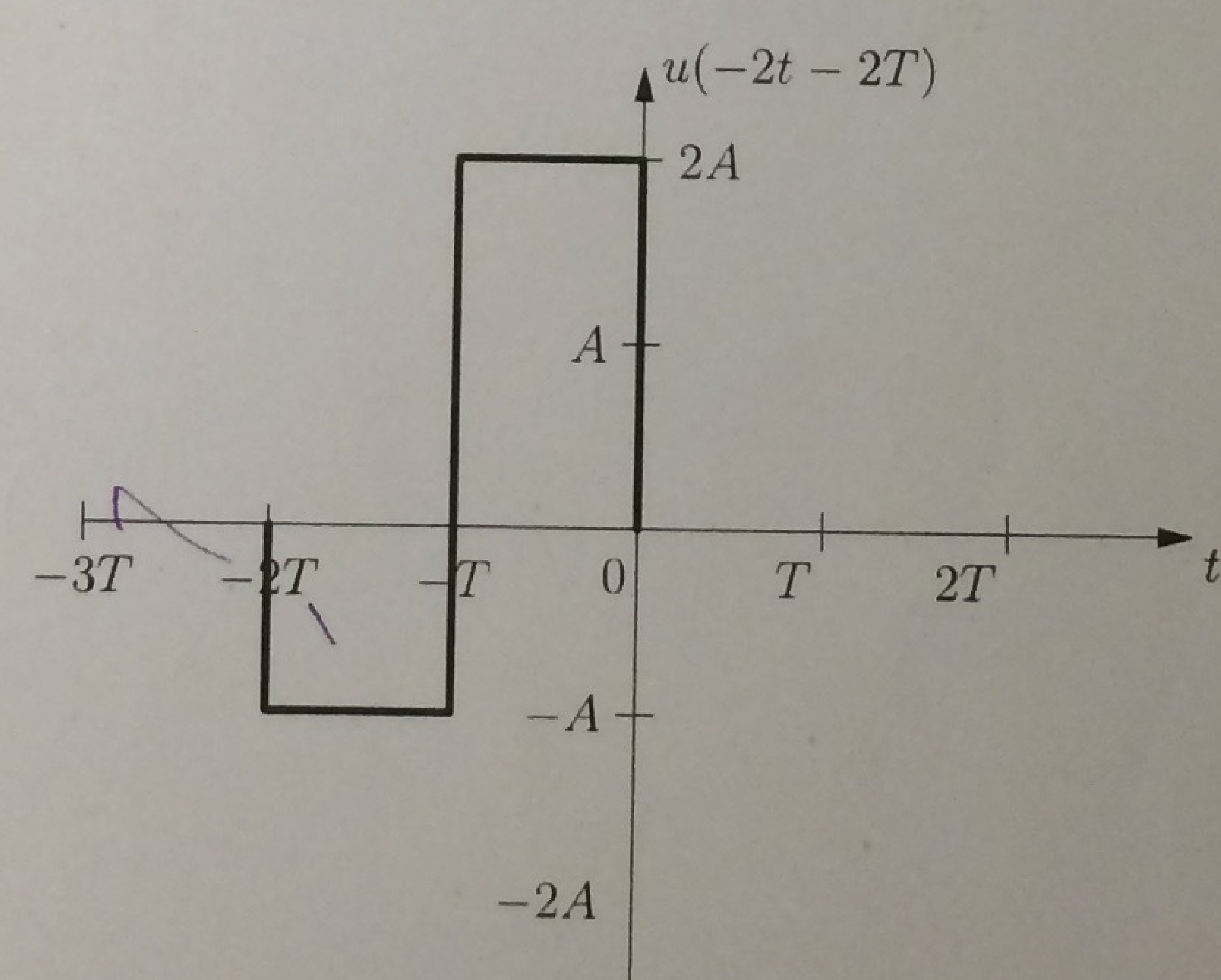
# 1 Zeitkontinuierliche Signale

**12 Punkte**

1.1 Gegeben sei das folgende zeitkontinuierliche Signal $u(t)$. 3,5 P




a) Skizzieren Sie das Signal $u(-2t-2T)$. 1 P




**0,5 Punkte für die richtige Skalierung**

**0,5 Punkte für die richtige Verschiebung**

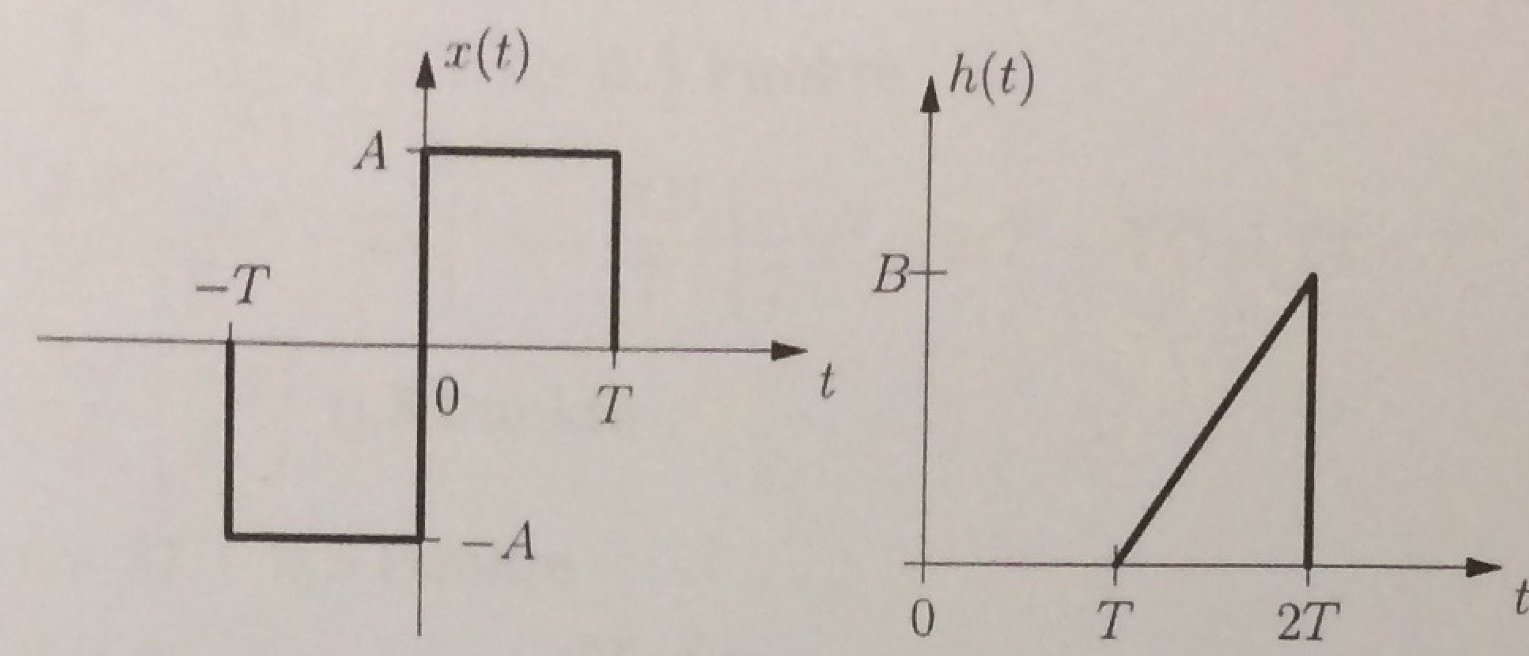
b) Das Signal $u(t)$ werde periodisch fortgesetzt mit $T_P = 6T$. Geben Sie für diesen Fall die Leistung des periodisch fortgesetzten Signals $u_P(t) = u(t) * \delta_{T_P}(t)$ an. 1,5 P

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{6T}\int_{-3T}^{3T} u^2(t)dt = \frac{1}{6T}\left(\int_{-2T}^{0}(2A)^2dt + \int_{0}^{2T}(-A)^2dt\right) \\ &= \frac{1}{6T}\left(\left[4A^2t\right]_{-2T}^{0} + \left[A^2t\right]_{0}^{2T}\right) = \frac{1}{6T}\left(8A^2T + 2A^2T\right) \\ &= \frac{10}{6}A^2 = \frac{5}{3}A^2 \end{aligned}$$

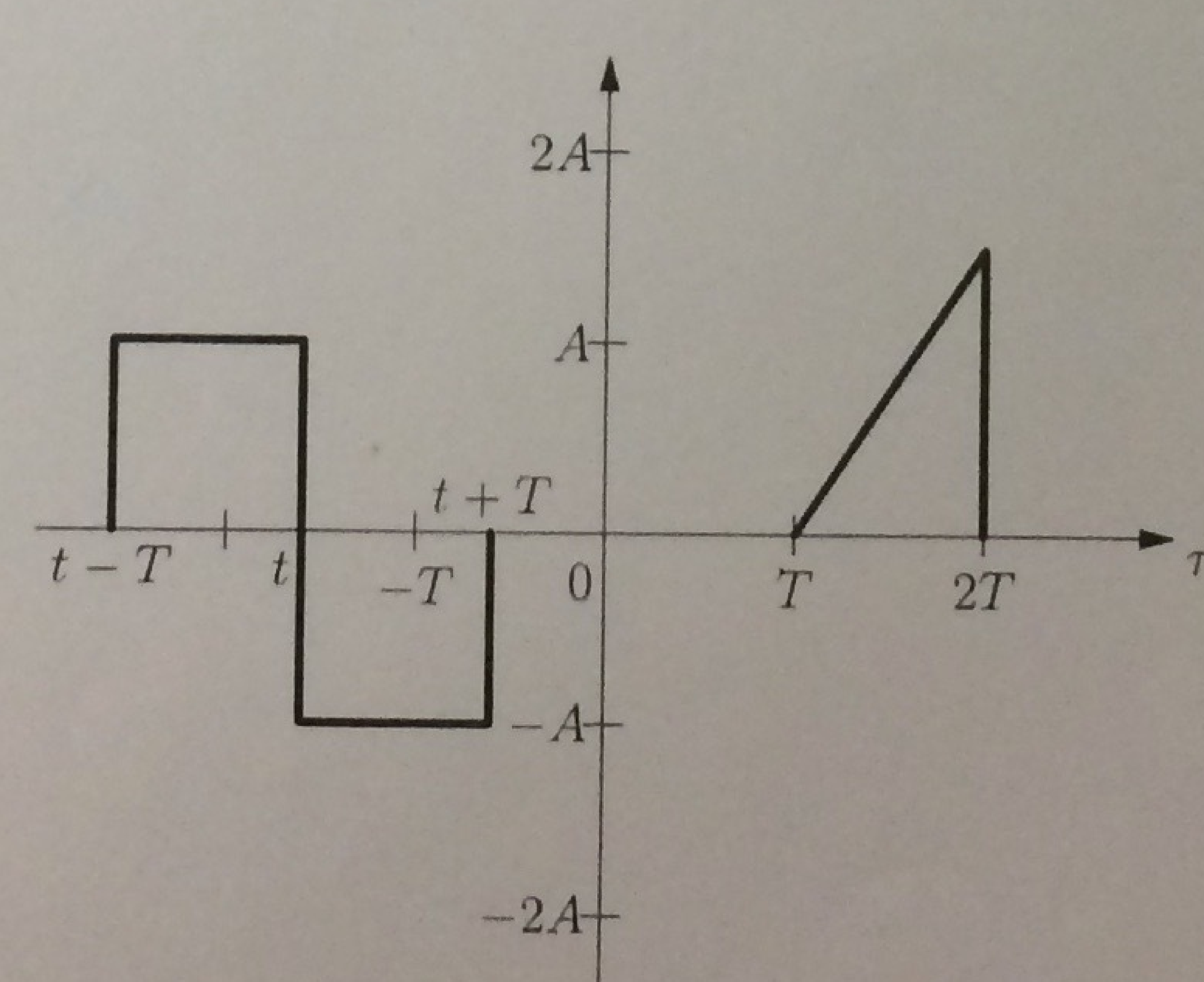
c) Beweisen Sie allgemein, dass ein periodisches Signal ein frequenzdiskretes Spektrum besitzt. 1* P

$$U_P(j\omega) = \mathcal{F}\left\{u(t) * \delta_{T_P}(t)\right\} = U(j\omega)\cdot \omega_{T_P}\delta_{\omega_{T_P}}(\omega), \text{ mit } \omega_{T_P} = \frac{2\pi}{T_P}$$

1.2 Gegeben seien die folgenden Signale $x(t)$ und $h(t)$. 6,5 P




a) Berechnen Sie die Antwort $y(t)$ eines Filters mit der Impulsantwort $h(t)$ auf das Eingangssignal $x(t)$. 4,5 P



**Fall 1:** $t \leq 0 : y(t) = 0$

**Fall 2:** $0 < t \leq T :$ **0,5 Punkte**

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -\int_{T}^{t+T} \frac{AB}{T}(\tau - T)d\tau \text{ **0,5 Punkte**} \\
&= -\frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}\tau^2 - T\tau\right] = -\frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}(t^2 + 2tT + T^2) - Tt - T^2 - \frac{1}{2}T^2 + T^2\right] \\
&= -\frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}t^2\right] \text{ **0,5 Punkte**}
\end{aligned}
$$

**3. Fall:** $T < t \leq 2T :$ **0,5 Punkte**

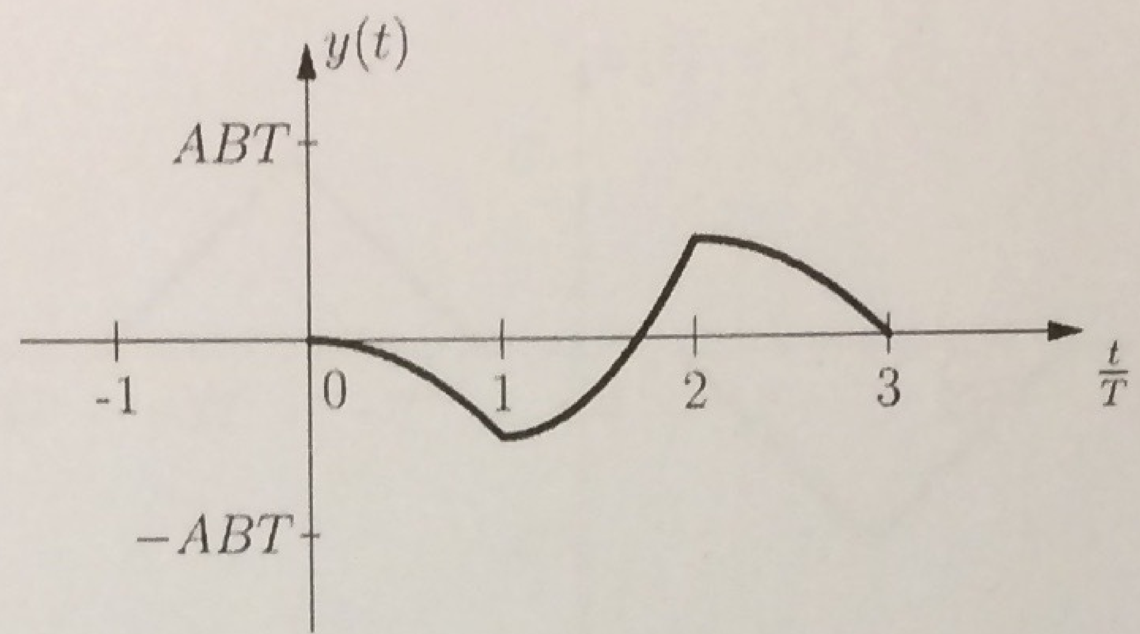
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{T}^{t} \frac{AB}{T}(\tau - T)d\tau - \int_{t}^{2T} \frac{AB}{T}(\tau - T)d\tau \text{ **0,5 Punkte**} \\
&= \frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}\tau^2 - T\tau\right]_{T}^{t} - \frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}\tau^2 - T\tau\right]_{t}^{2T} \\
&= \frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}t^2 - Tt - \frac{1}{2}T^2 + T^2\right] - \frac{AB}{T}\left[2T^2 - 2T^2 - \frac{1}{2}t^2 + Tt\right] \\
&= \frac{AB}{T}\left[t^2 - 2Tt + \frac{1}{2}T^2\right] \text{ **0,5 Punkte**}
\end{aligned}
$$

**4. Fall:** $2T < t \leq 3T :$ **0,5 Punkte**

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{t-T}^{2T} \frac{AB}{T}(\tau - T)d\tau \text{ **0,5 Punkte**} \\
&= \frac{AB}{T}\left[\frac{1}{2}\tau^2 - T\tau\right]_{t-T}^{2T} = \frac{AB}{T}\left[2T^2 - 2T^2 - \frac{1}{2}(t^2 - 2Tt + T^2) + Tt - T^2\right] \\
&= \frac{AB}{T}\left(-\frac{1}{2}t^2 + 2Tt - \frac{3}{2}T^2\right) \text{ **0,5 Punkte**}
\end{aligned}
$$

**Fall 5:** $3T < t : y(t) = 0$

b) Skizzieren Sie $y(t)$ im Bereich $-3T \leq t \leq 3T$. 2 P

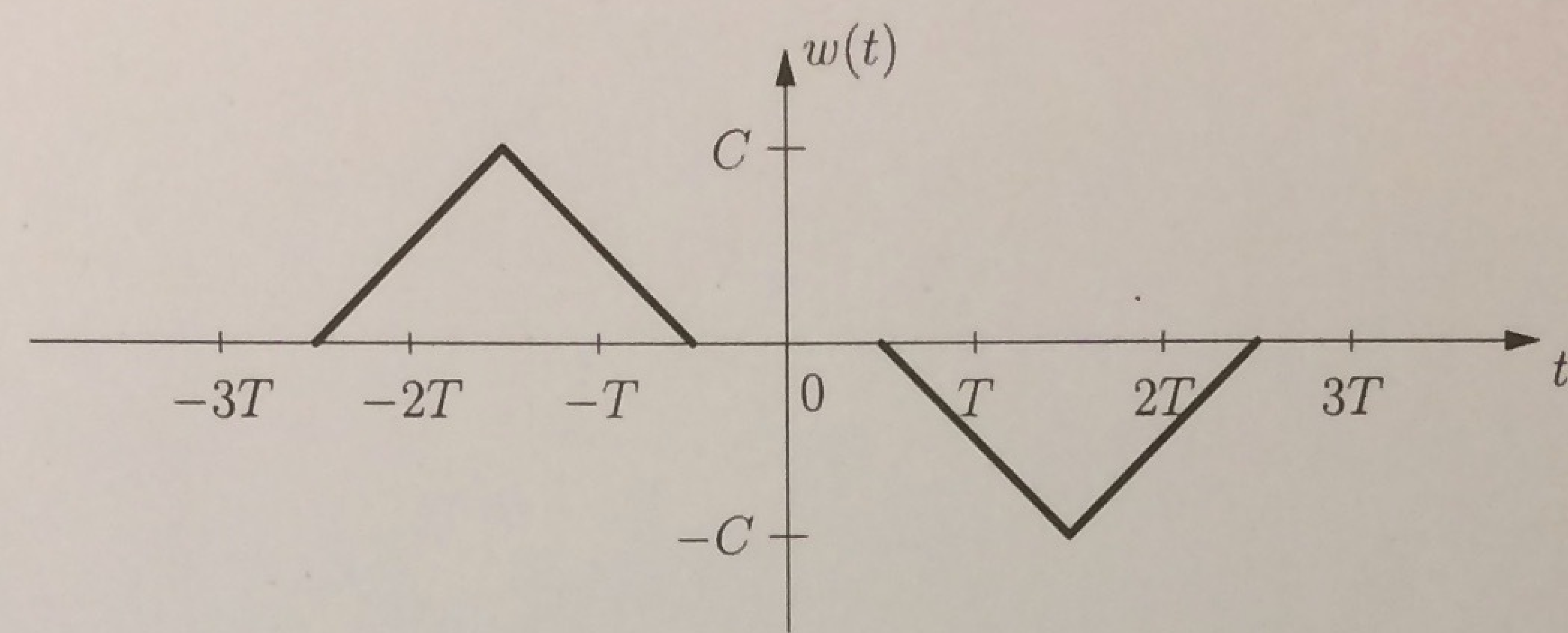


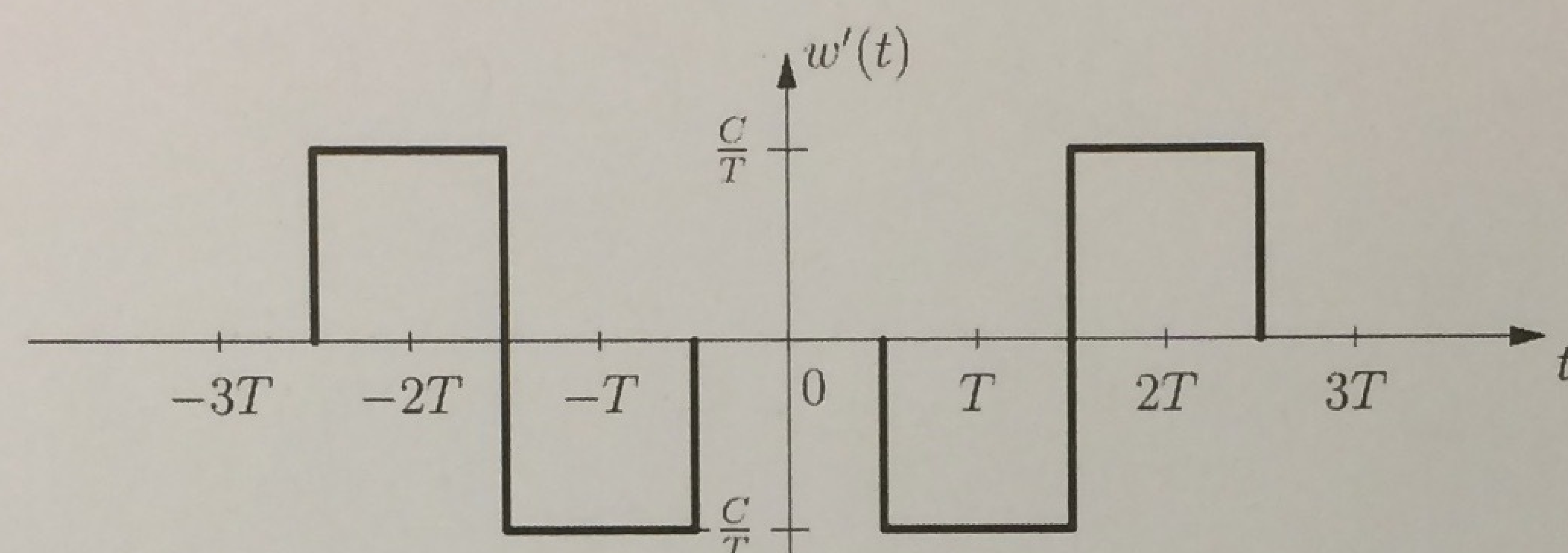

**1 Punkt für die richtigen Nullstellen**

**0,5 Punkte für die maximale Amplitude ($\frac{ABT}{2}$)**

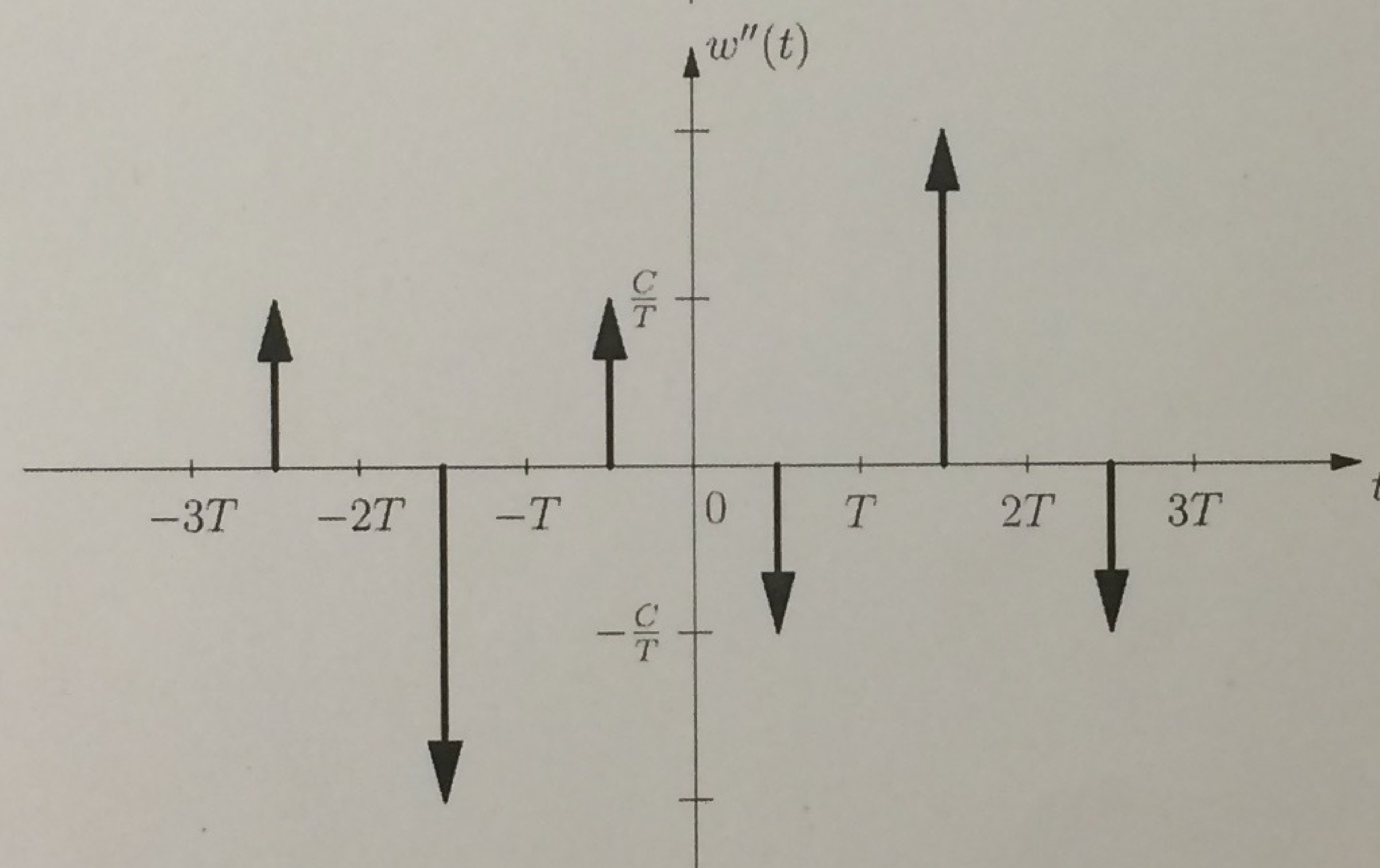
**0,5 Punkte für den Kurvenverlauf**

1.3 Berechnen Sie die Fouriertransformierte des folgenden Signals. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zu trigonometrischen Funktionen zusammen. 2 P




**0,5 Puntke**



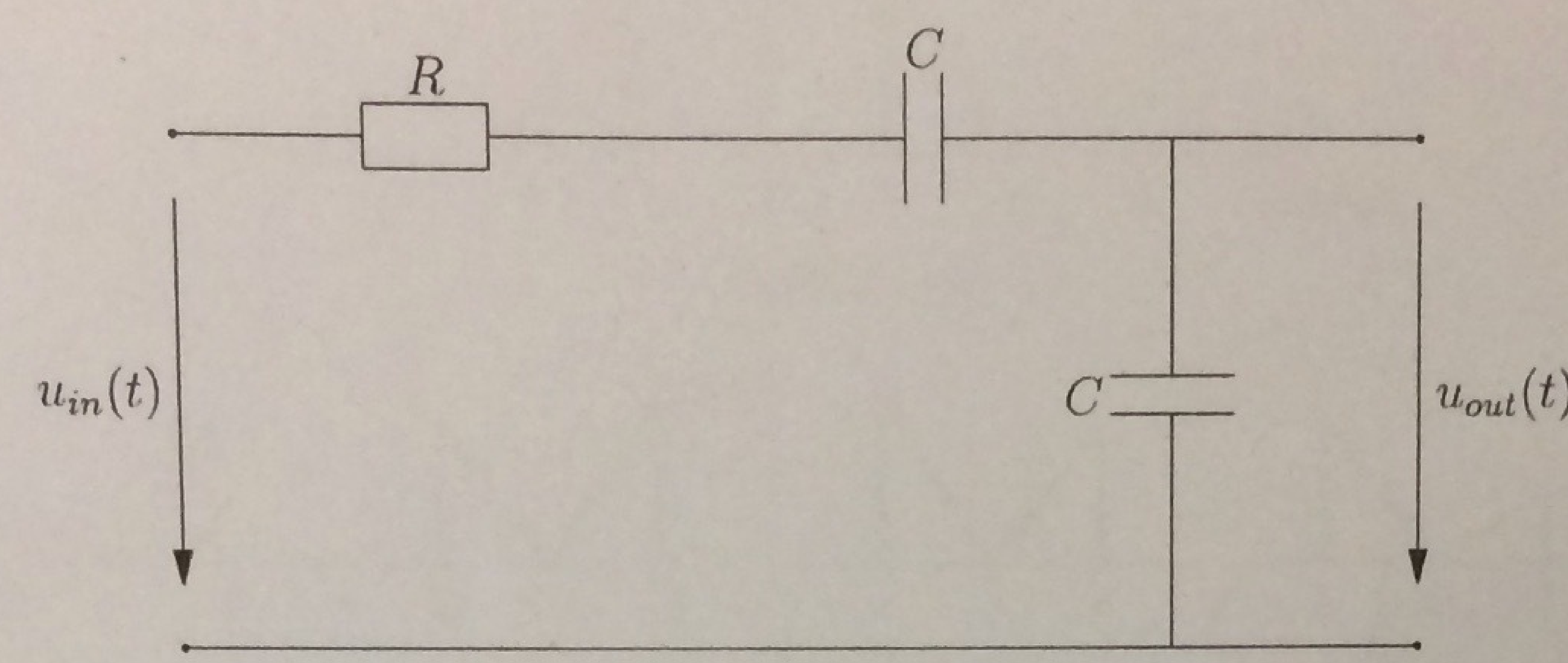

**0,5 Punkte**

$$
\begin{aligned}
w''(t) &= \frac{C}{T}\left(\delta(t+2{,}5T) - 2\delta(t+1{,}5T) + \delta(t+0{,}5T)\right. \\
&\quad \left.-\delta(t-0{,}5T) + 2\delta(t-1{,}5T) - \delta(t-2{,}5T)\right) \\
(j\omega)^2 W(j\omega) &= \frac{C}{T}\left(e^{j\omega 2{,}5T} - e^{-j\omega 2{,}5} - 2\left(e^{j\omega 1{,}5T} - e^{-j\omega 1{,}5T}\right) + e^{j\omega 0{,}5T} - e^{-j\omega 0{,}5T}\right) \quad \textbf{0,5 Punkte} \\
-\omega^2 W(j\omega) &= \frac{Cj}{T}\left(2\sin(2{,}5\omega T) - 4\sin(1{,}5\omega T) + 2\sin(0{,}5\omega T)\right) \\
W(j\omega) &= -\frac{Cj}{\omega^2 T}\left(2\sin(2{,}5\omega T) - 4\sin(1{,}5\omega T) + 2\sin(0{,}5\omega T)\right) \quad \textbf{0,5 Punkte}
\end{aligned}
$$

## 2 Zeitkontinuierliche Systeme und Abtastung **10 Punkte**

2.1 Gegeben sei das folgende Netzwerk. 3 P

*Hinweis: Beide Kondensatoren in dem Netzwerk sind identisch!*




a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Systems $H(s)$ im Laplacebereich unter Verwendung komplexer Impedanzen. 1,5 P

$$H(s) = \frac{U_{OUT}(s)}{U_{IN}(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC} + \frac{1}{sC}} \quad \textbf{1 Punkt}$$

$$= \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{2}{sC}} = \frac{1}{2 + sRC} = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{2}{RC} + s} \quad \textbf{0,5 Punkte}$$

b) Geben Sie die Impulsantwort des Systems $h(t)$ im Zeitbereich an. 1,5 P

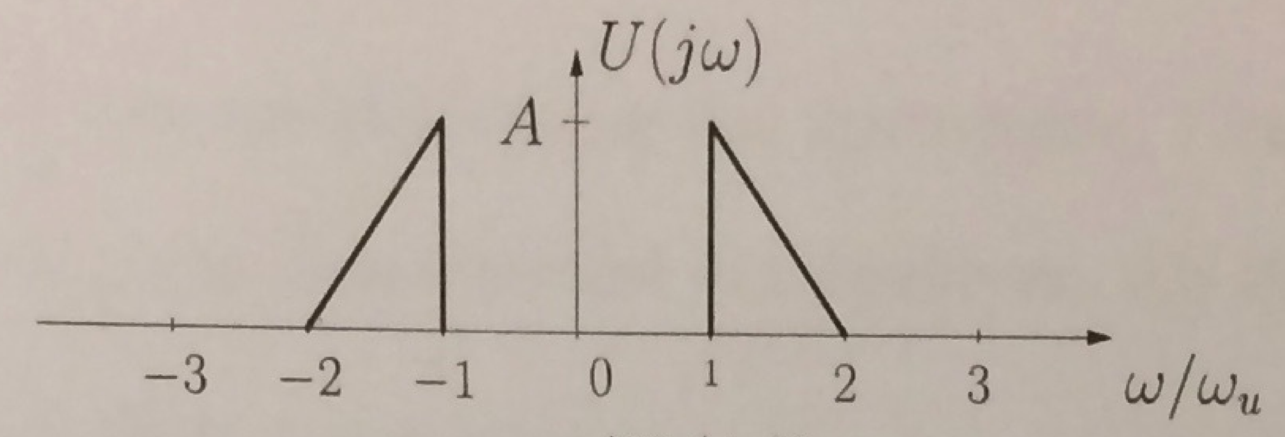
$$\frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{-at} \Rightarrow a = \frac{2}{RC} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{2}{RC}t} \quad , t \geq 0$$

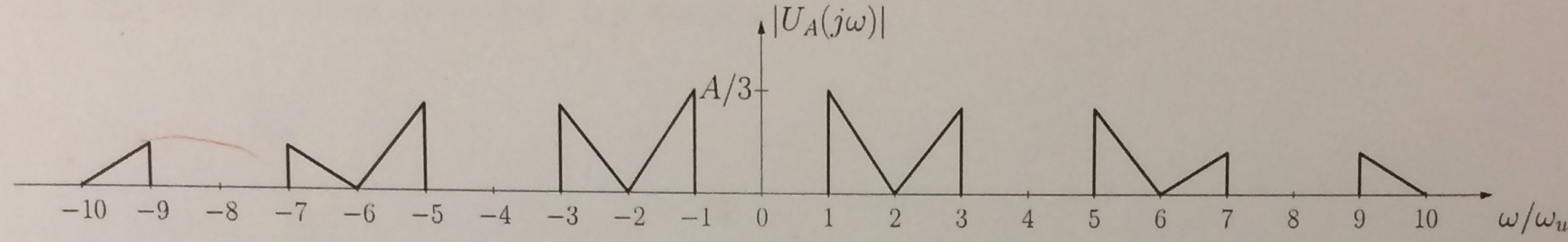
**0,5 Punkte für $a$**

**0,5 Punkte für die e-Funktion**

**0,5 Punkte für den Exponenten**

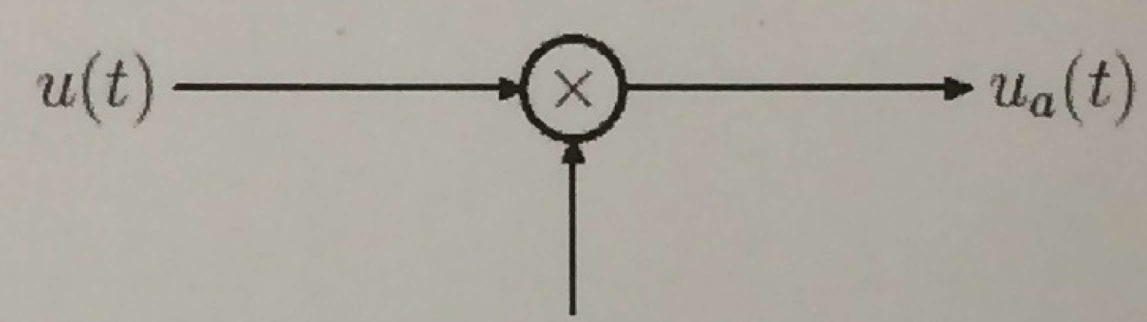
2.2 Gegeben sei das folgende Spektrum $U(j\omega)$ eines zeitkontinuierlichen Signals $u(t)$ sowie das Betragsspektrum $|U_A(j\omega)|$ einer abgetasteten Version von u(t). 5 P




a) Welche Form der Abtastung wurde hier verwendet? Skizzieren Sie das Blockschaltbild für diese Form der Abtastung. 1,5 P

**Shapetop-Abtastung bzw. Abtastung mittels Signalausblendung 0,5 Punkte**




$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sqcap_{\alpha T}(t - k \cdot T)$$

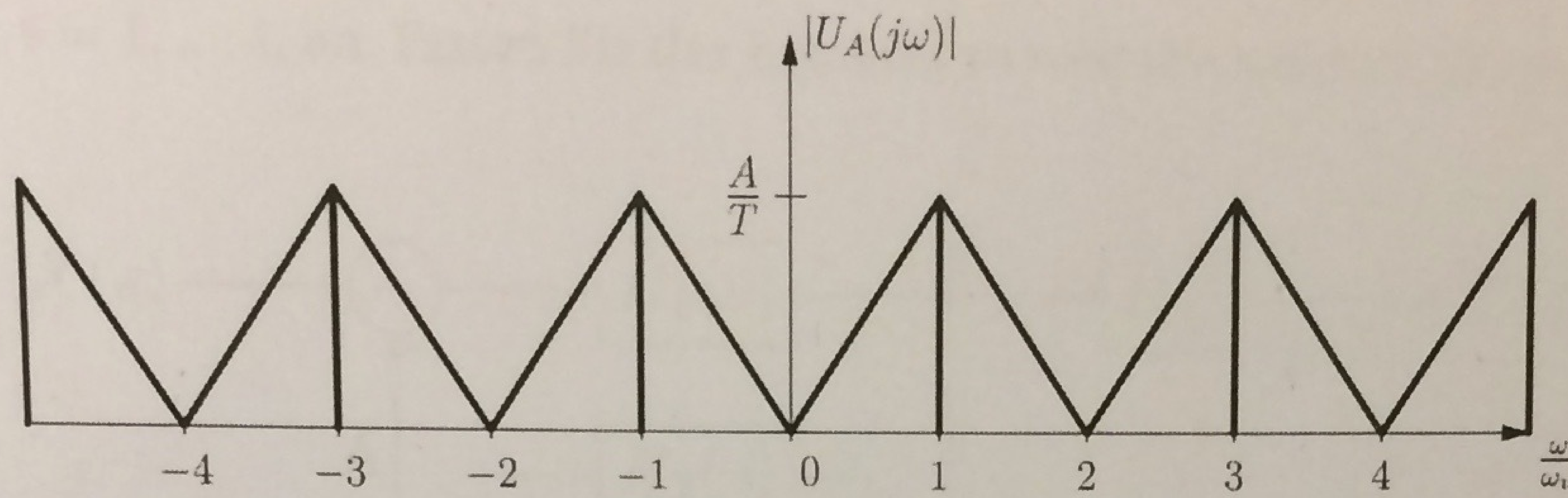
**1 Punkt**

b) Geben Sie die Werte für $\alpha$ und $\omega_T$ an. Ist das Nyquistkriterium hier erfüllt? 2 P

$$\alpha = \frac{1}{3} \text{ aus der Skalierung des Spektrums, 1 Punkt}$$
$$\omega_T = 4\omega_u \text{ aus dem Abstand der Spektren, 0,5 Punkte}$$

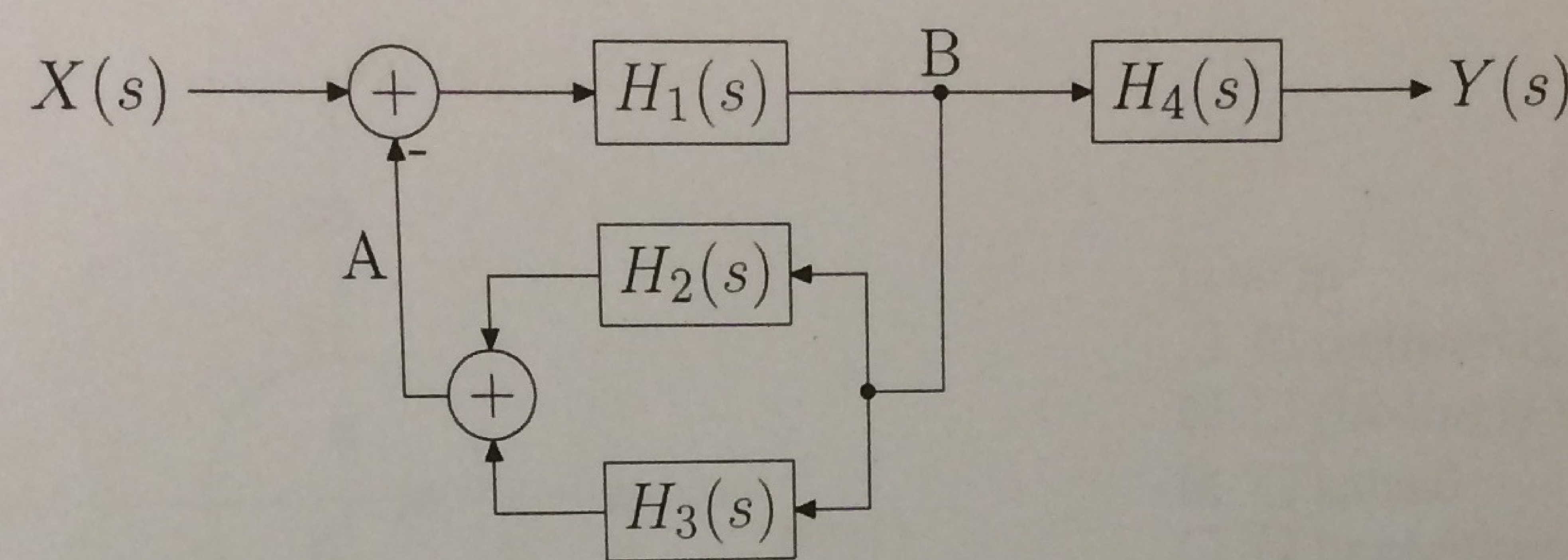
**Das Nyquistkriterium ist erfüllt. 0,5 Punkte**

c) Skizzieren Sie das Betragsspektrum des abgetasteten Signals, falls eine ideale Abtastung mit $\omega_T = 2\omega_u$ durchgeführt worden wäre. 1,5 P




mit $T = \frac{2\pi}{\omega_T}$

2.3 Gegeben sei das folgende Blockschaltbild. Geben Sie die Gesamtübertragungsfunktion $H_{\text{ges}}(s)$ in Abhängigkeit von den Einzelübertragungsfunktionen $H_i(s)$, $i = 1, ..., 4$, an. Fassen Sie das Ergebnis so weit wie möglich zusammen. 2 P




$A = (H_2 + H_3) \cdot B$ **0,5 Punkte**

$Y = H_4 \cdot B$

$B = H_1 \cdot (X - A)$

$B = H_1 \cdot (X - (H_2 + H_3) \cdot B)$ **0,5 Punkte**

$B = H_1 X - H_1 \cdot (H_2 + H_3) \cdot B$

$B \cdot (1 + H_1(H_2 + H_3)) = H_1 X$

$$B = \frac{H_1 X}{1 + H_1(H_2 + H_3))}$$

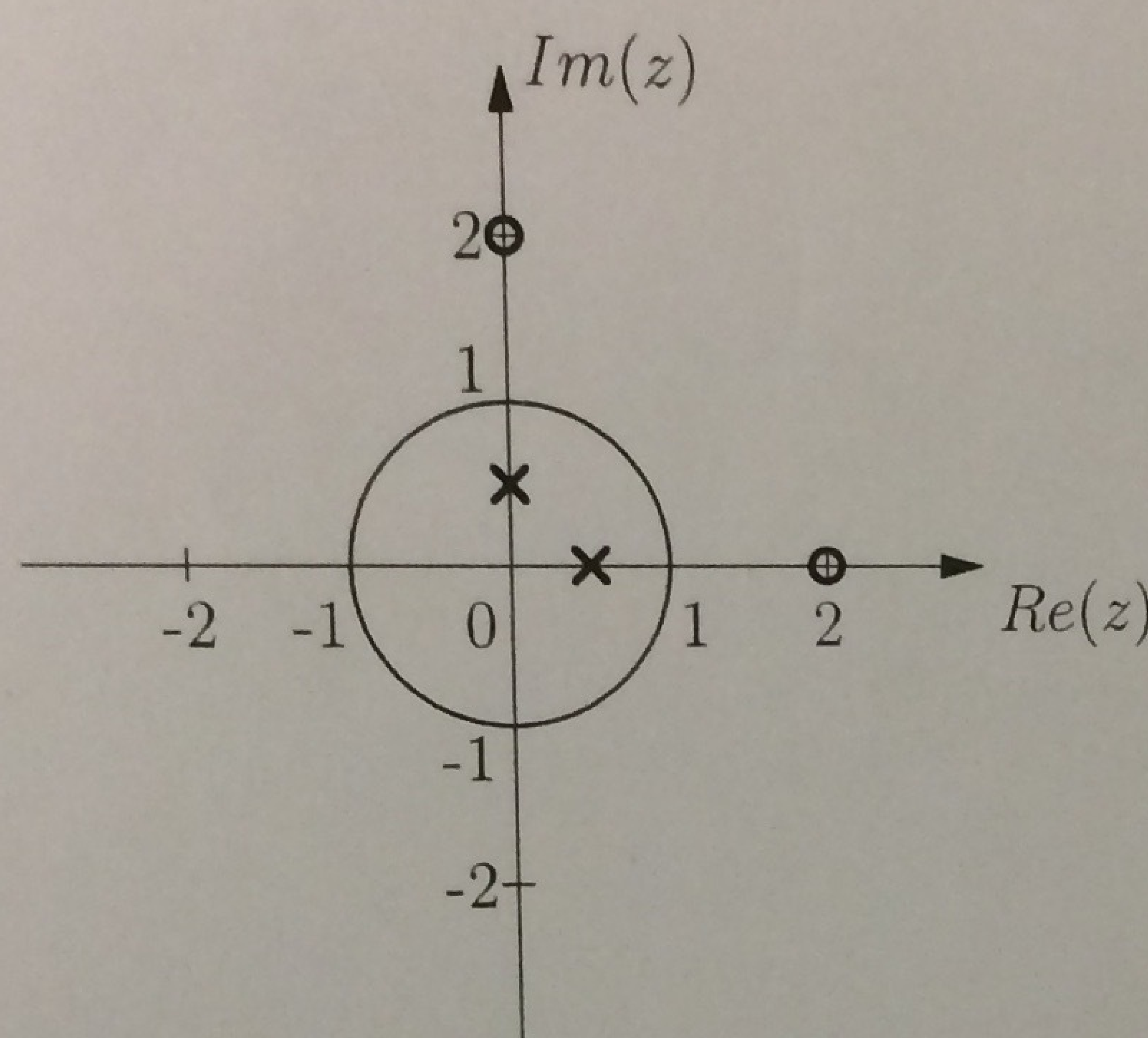
$$Y = H_4 B = \frac{H_1 H_4 X}{1 + H_1 H_2 + H_1 H_3} \Rightarrow H_{\text{ges}} = \frac{H_1 H_4}{1 + H_1 H_2 + H_1 H_3}$$

**0,5 Punkte für den Zählerterm**

**0,5 Punkte für den Nennerterm**

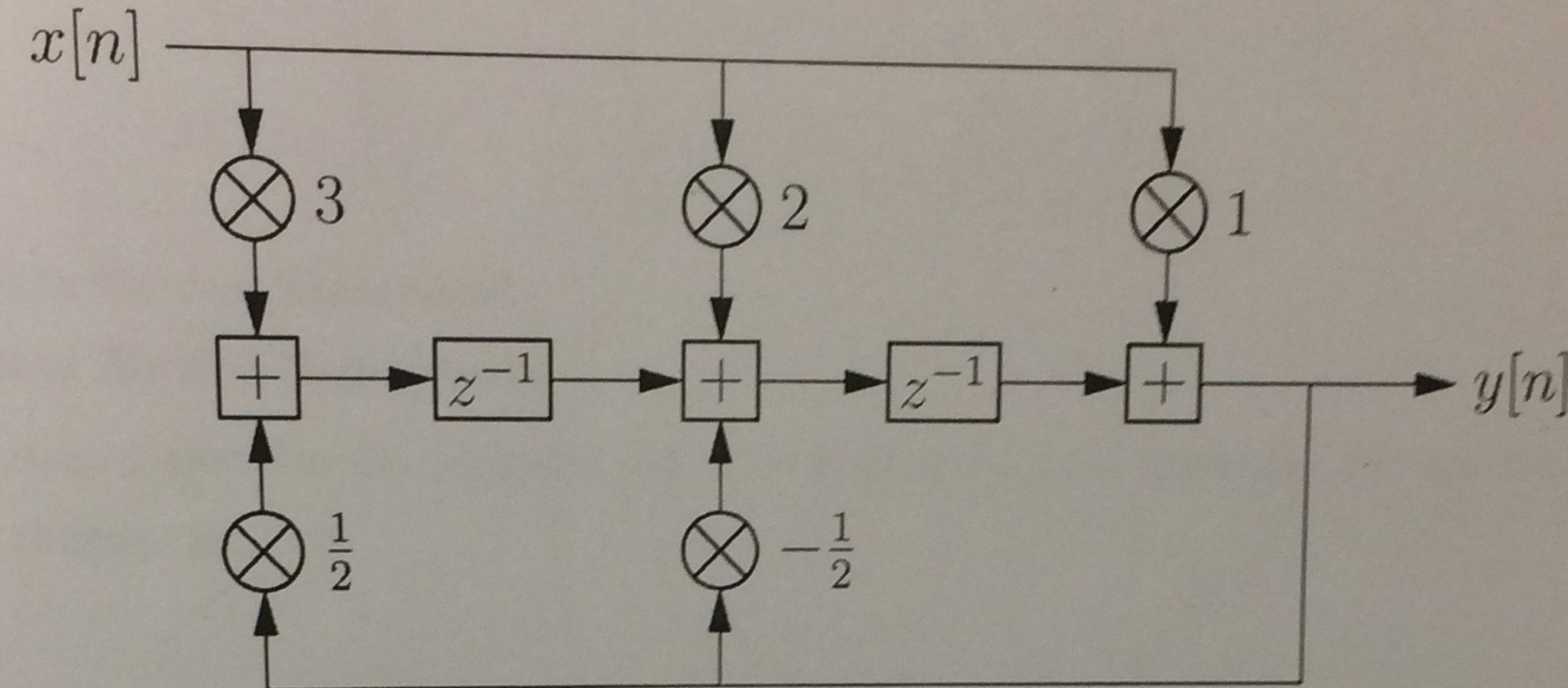
# 3 Zeitdiskrete Signale und Systeme **9 Punkte**

3.1 Gegeben sei das folgende PN-Diagramm eines zeitdiskreten Systems. Kreuzen Sie rechts die entsprechenden Eigenschaften des Systems an. 3 P




ja nein
☐ ☒ reellwertig
☒ ☐ (bedingt) stabil
☒ ☐ kausal
☐ ☒ linearphasig
☒ ☐ Allpass
☐ ☒ minimalphasig

3.2 Gegeben sei das folgende zeitdiskrete Filter. 6 P




a) Geben Sie die Differenzengleichung des Filters an. 0,5 P

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + 3x(n-2) - \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{2}y(n-2)$$

b) Geben Sie die ersten vier Elemente der Impulsantwort des Filters an. 2 P

$$h = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{4}, -\frac{5}{8}\right\}$$

c) Geben Sie die Systemfunktion des Filters an. 1 P

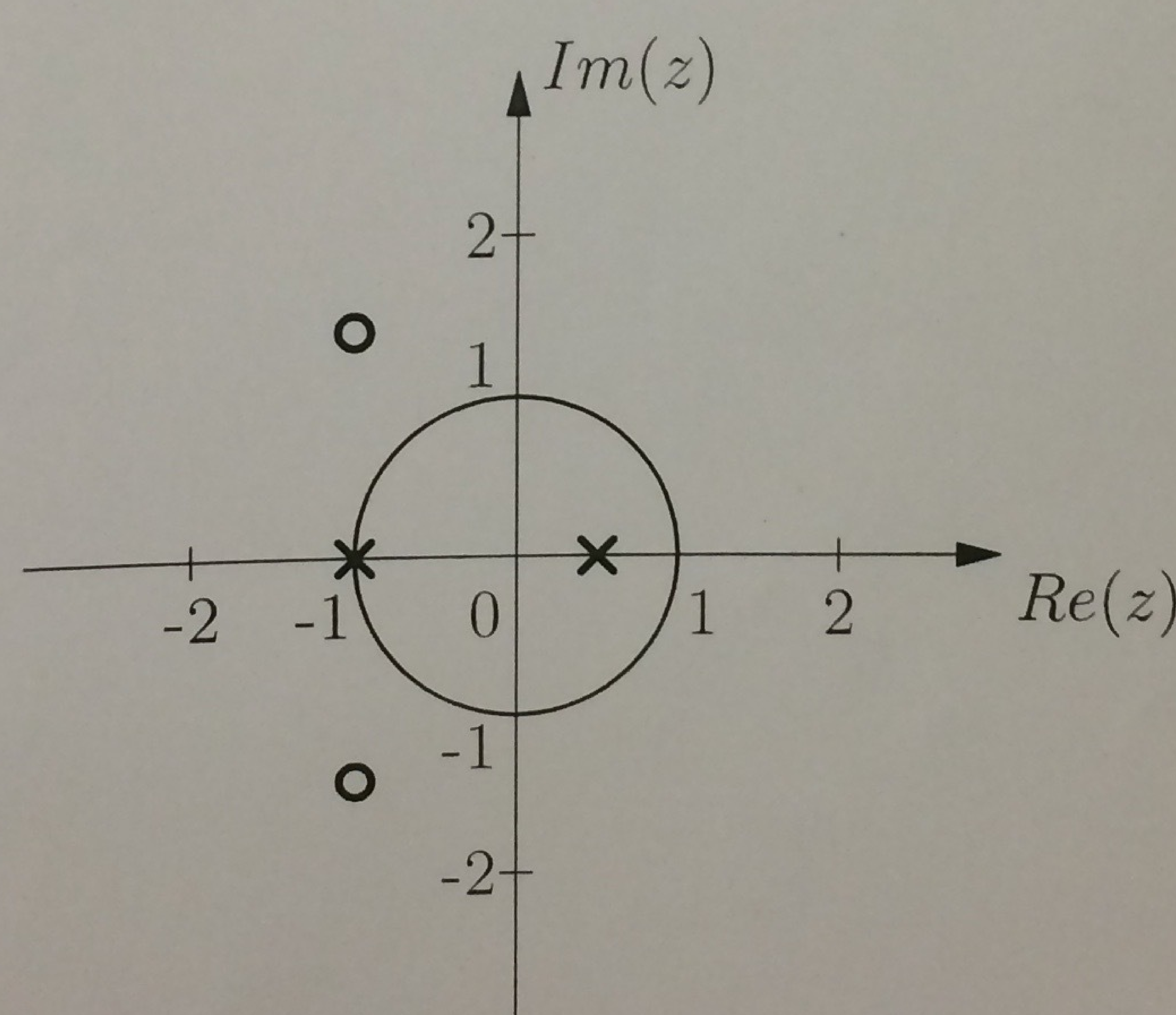
$$Y(z) + \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + \frac{1}{2}Y(z)z^{-2} = X(z) + 2X(z)z^{-1} + 3X(z)z^{-2}$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2 + 2z + 3}{z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}}$$

**0,5 Punkte für den Zählerterm**

**0,5 Punkte für den Nennerterm**

d) Bestimmen Sie die Lage der Pol- und Nullstellen und skizzieren Sie das PN-Diagramm. 1 P

$$z_{o1/2} = -1 \pm \sqrt{\frac{4}{4} - 3} = -1 \pm \sqrt{2}j$$
$$z_{x1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} \Rightarrow z_{x1} = -1, z_{x2} = \frac{1}{2}$$




**0,5 Punkte je Polstelle**
**0,5 Punkte je Nullstelle**

3.3 Gegeben sei das Signal $u = \{1, 0, 2\}$. Berechnen Sie die Koeffizienten der dazugehörigen diskreten Fouriertransformation $U_{\text{DFT}}(n)$. 1,5 P

$$U_{\textbf{DFT}}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} u(k)e^{-jkn\Delta\Omega} = \sum_{k=0}^{2} u(k)e^{-jkn\frac{2\pi}{3}}, \textbf{ für } N = 3, \Delta\Omega = \frac{2\pi}{3}$$

$$U_{\textbf{DFT}}(0) = 1 + 0 + 2 = 3$$

$$U_{\textbf{DFT}}(1) = 1e^0 + 0e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 2e^{-j2\cdot\frac{2\pi}{3}} = 1 + 2\cdot(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j) = \sqrt{3}i$$

$$U_{\textbf{DFT}}(2) = -\sqrt{3}i, \textbf{ da } U_{\textbf{DFT}}(n) = U^*_{\textbf{DFT}}(N-n)$$