Prof. Dr. Radosveta Ivanova-Stenzel
Dr. Vera Angelova

SPIELTHEORIE

KLAUSUR WS 2015/16

18. Februar 2016

Name:

Studienfach:

Abschluss:

Matrikelnummer:

Lösen Sie **alle 3** Aufgaben!

Geben Sie zu Ihren Ergebnissen **immer den Lösungsweg** an. Ergebnisse, deren Ermittlung nicht nachvollzogen werden kann, werden **nicht gewertet!**

Sie haben **90** Minuten Zeit.

Erlaubtes (aber nicht notwendiges) Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer Taschenrechner.

VIEL ERFOLG!

Aufgabe 1 (*35 Punkte*)

TEIL I. Betrachten Sie das folgende statische Spiel mit unvollständiger Information:

1. Die "Natur" bestimmt, ob die Auszahlungen wie im Spiel A oder wie im Spiel B sind. Das Spiel A wird mit Wahrscheinlichkeit 1/4 gezogen.

2. Spieler 1 erfährt, ob die "Natur" das Spiel A oder das Spiel B gezogen hat. Spieler 2 erfährt es nicht.

3. Beide Spieler wählen gleichzeitig und unabhängig voneinander ihre Aktionen aus $A_1 = \{U, M, D\}$ bzw. $A_2 = \{X, Y\}$.

4. Die Auszahlungen sind gegeben durch das Spiel, das von der "Natur" gezogen wurde.

		Spieler 2	
		X	Y
	U	3, 2	1, 3
Spieler 1	M	5, 5	1, 6
	D	6, 1	2, 2

Spiel A

		Spieler 2	
		X	Y
	U	1, 1	5, -1
Spieler 1	M	-1, 8	8, 6
	D	0, 0	8, 4

Spiel B

Alle Angaben sind "common knowledge".
Zeigen Sie, dass es ein Bayesianisches Gleichgewicht in reinen Strategien gibt, bei dem Spieler 1 die Strategie (D, U) spielt (d.h., im Spiel A wählt Spieler 1 'D' und im Spiel B wählt Spieler 1 'U').

TEIL II. Angenommen das Spiel wird folgendermaßen modifiziert. Statt der "Natur", entscheidet Spieler 1, ob Spiel A oder Spiel B gespielt wird, indem er zwischen den Aktionen 'L' und 'R' wählt. Wenn er 'L' wählt, wird Spiel A gespielt; wenn er 'R' wählt, wird Spiel B gespielt. Beide Spieler erfahren die Entscheidung von Spieler 1 (d.h. sie wissen, ob Spieler 1 Spiel A oder Spiel B gewählt hat). Danach spielen beide Spieler das von Spieler 1 gewählte Spiel.

a) Zeichnen Sie den Spielbaum, der dieses modifizierte Spiel abbildet.

b) Bestimmen Sie alle teilspielperfekten Gleichgewichte in reinen Strategien für dieses modifizierte Spiel.

TEIL III. Betrachten Sie nun nur Spiel A:

		Spieler 2 X	Spieler 2 Y
Spieler 1	U	3, 2	1, 3
	M	5, 5	1, 6
	D	6, 1	2, 2

Spiel A

Angenommen, das Spiel wird zweimal hintereinander gespielt. Die Spieler beobachten das Ergebnis der ersten Runde, bevor sie ihre Aktionen in der zweiten Runde wählen. Die Auszahlungen des ganzen Spiels ergeben sich als Summe der Auszahlungen jeder Runde. Gibt es ein teilspielperfektes Nash–Gleichgewicht, in dem (M, X) in der ersten Runde gespielt wird? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (*22 Punkte*)

TEIL I. Betrachten Sie das folgende Spiel:

		Spieler 2 X	Spieler 2 Y
Spieler 1	U	3, 5	0, 0
	V	0, 0	5, 3
	W	2, 1	4, 0

a) Bestimmen Sie alle Nash–Gleichgewichte in reinen Strategien.

b) Gibt es ein Nash–Gleichgewicht, bei dem Spieler 1 die Strategie $(r, 1-r, 0)$ spielt, d.h. nur zwischen U (Wahrscheinlichkeit r) und V (Wahrscheinlichkeit $1-r$) mischt? Wenn "ja", wie sieht dieses Nash–Gleichgewicht aus, wenn "nein", warum gibt es keins?

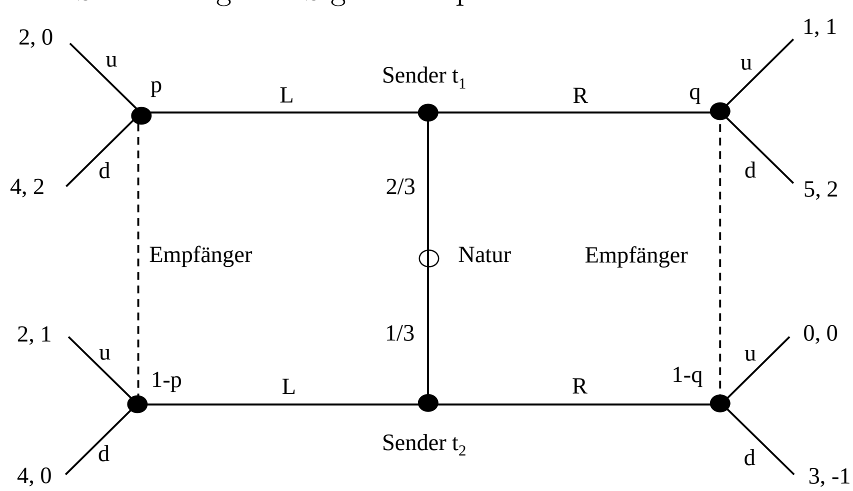
TEIL II. Betrachten Sie nun das folgende Spiel in Normalform:

		Spieler 2		
		X	Y	Z
	V	0, 1	1, 0	1, 0
Spieler 1	W	1, 0	0, 1	1, 0
	L	1, 0	1, 0	0, 1

Gibt es ein Nash–Gleichgewicht in vollständig gemischten Strategien in diesem Spiel (d.h. ein Nash–Gleichgewicht, bei dem jeder Spieler zwischen all seinen Strategien mischt)? Wenn "ja", geben Sie dieses Nash–Gleichgewicht an, wenn "nein", warum gibt es keins?

Aufgabe 3 (*33 Punkte*)

Betrachten Sie das folgende Signalisierspiel:



a) Bestimmen Sie *alle pooling* perfekten Bayesianischen Gleichgewichte in reinen Strategien.

b) Gibt es ein perfektes Bayesianisches Gleichgewicht, bei dem der Sender die Strategie (R, L) spielt? Begründen Sie.

c) Angenommen es gibt noch einen dritten Sender–Typen, t_3. Der Sender hat weiterhin die Wahl zwischen den Nachrichten 'L' und 'R'. Aus wie vielen Aktionen besteht die Strategie des Empfängers in diesem Fall?

Lösungen Klausur Spieltheorie vom 18. Februar 2016

Prof. Dr. Radosveta Ivanova-Stenzel
Dr. Vera Angelova

1. Aufgabe: *(35 Punkte)*

A.1/TEIL I:

Angenommen Spieler 1 spielt (D, U). Was ist die beste Antwort von Sp. 2?

X:$\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 1$

Y:$\frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{4}$

Beste Anwort auf (D, U) ist X.

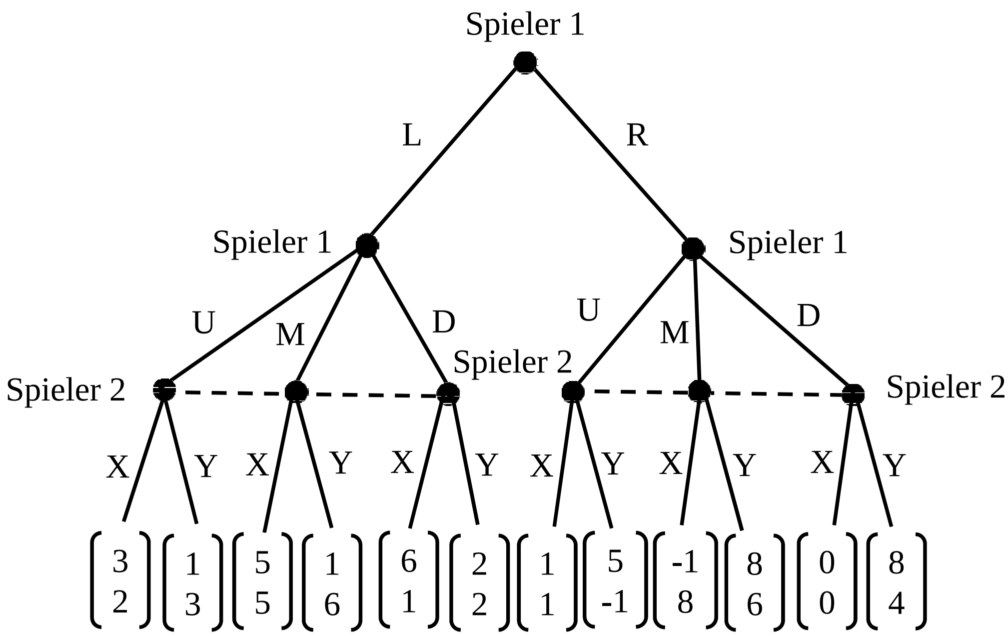
Angenommen Spieler 2 spielt X. Was ist die beste Antwort darauf?

Spiel A: D, da $6 > 5$ und $6 > 3$

Spiel B: U, da $1 > -1$ und $1 > 0$

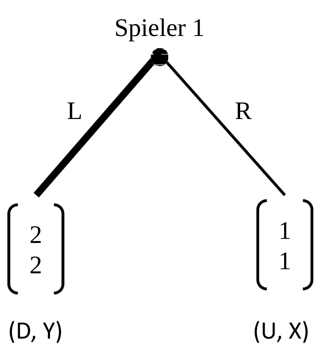
Bayesianisches Gleichgewicht: $((D, U), X)$.

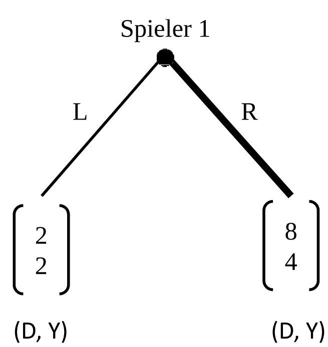
A.1/TEIL IIa:



A.1/TEIL IIb:

NGG im Spiel A: (D, Y) mit den Auszahlungen $(2, 2)$
NGG im Spiel B: (U, X) mit den Auszahulungen $(1, 1)$ und (D, Y) mit den Auszahlungen $(8, 4)$





1. TSP-NGG: $((L, D, U), (Y, X))$
2. TSP-NGG: $((R, D, D), (Y, Y))$

A.1/TEIL III:

Das einzige NGG des Stufenspiels ist (D, Y). Das Spiel wird endlich oft wiederholt. Dieses NGG wird in jeder Runde gespielt. Nein, es gibt kein TSP-NGG, in dem (M, X) in der ersten Runde gespielt wird.

2. Aufgabe: *(22 Punkte)*

A.2/TEIL Ia:

NGG in reinen Strategien: (U, X) und (V, Y)

A.2/TEIL Ib:

Angenommen Spieler 2 spielt die gemischte Strategie $(q, 1-q)$, d.h. Sp. 2 spielt X mit Wahrscheinlichkeit q und Y mit Wahrscheinlichkeit $(1-q)$.

Spieler 1 mischt, wenn er indifferent ist, d.h. falls
$\pi_1(U) = \pi_1(V) \Leftrightarrow 3q = 5 \cdot (1-q) \Leftrightarrow q = \frac{5}{8}$

Ist es eine beste Antwort von Spieler 1 zu mischen und W nicht zu spielen?

$\pi_1(U) = 3 \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = \pi_1(V)$

$\pi_1(W) = 2 \cdot \frac{5}{8} + 4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{22}{8}$

Da $\pi_1(W) > \pi_1(U)$, ist Mischen keine beste Antwort. Also, es gibt kein NGG, bei dem Spieler 1 zwischen U und V mischt und W nicht spielt.

A.2/TEIL II:

Angenommen Spieler 1 spielt die gemischte Strategie $(r_1, r_2, 1-r_1-r_2)$ und Spieler 2 spielt die gemischte Strategie $(q_1, q_2, 1-q_1-q_2)$.
Spieler mischen, wenn sie indifferent sind.

Erwartete Auszahlungen Spieler 1:
$\pi_1(V) = q_2 + 1 - q_1 - q_2$
$\pi_1(W) = q_1 + 1 - q_1 - q_2$
$\pi_1(L) = q_1 + q_2$

Vollständig mischen bedeutet: $V \sim W \sim L$
$V \sim W : q_2 = q_1$
$W \sim L : 1 - 2q_2 = q_1$

Die Lösung dieses Gleichungssystems von zwei Gleichungen und zwei Unbekannten ist: $q_1 = q_2 = \frac{1}{3}$. Also, im NGG spielt Spieler 2 die gemischte Strategie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Erwartete Auszahlungen von Spieler 2:
$\pi_2(X) = r_1$
$\pi_2(Y) = r_2$
$\pi_2(Z) = 1 - r_1 - r_2$

Vollständig mischen bedeutet: $X \sim Y \sim Z \Leftrightarrow r_1 = r_2 = 1 - r_1 - r_2 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{3}$

Also, im NGG spielt Spieler 1 die gemischte Strategie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

NGG in vollständig gemischten Strategien: $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$.

3. Aufgabe: *(33 Punkte)*

A.3a:

1. GG-Kandidat: Sender spielt $(R, R) \Rightarrow q = \frac{1}{3}$

Beste Antwort des Empfängers:

$u : 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$d : 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{1}{3} = 1$

Der Empfänger spielt also d.

GG-Auszahlung t_1: 5. Sender Typ 1 hat keinen Anreiz abzuweichen, da nach L alle Auszahlungen kleiner als 5 sind.

GG-Auszahlung t_2: 3. Nach L gibt es eine höhere Auszahlung: 4. Damit Sender Typ 2 nicht abweicht, muss der Empfänger u nach L spielen.

$u \geq d \Leftrightarrow 0p + 1 \cdot (1-p) \geq 2p + 0 \cdot (1-p) \Leftrightarrow p \leq \frac{1}{3}$

PBGG: $((R, R), (u, d), p \leq \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3})$.

<u>2. GG-Kandidat:</u> Sender spielt $(L, L) \Rightarrow p = \frac{2}{3}$

Beste Antwort des Empfängers:

$u : 0 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$d : 2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Der Empfänger spielt also d.

GG-Auszahlung t_1: 4. Nach R gibt es eine höhere Auszahlung: 5. Damit Sender Typ 1 nicht abweicht, muss der Empfänger u nach R spielen.

GG-Auszahlung t_2: 4. Sender Typ 2 hat keinen Anreiz abzuweichen, da nach R alle Auszahlungen kleiner als 4 sind.

$u \geq d \Leftrightarrow 1q \geq 2q - 1 \cdot (1-q) \Leftrightarrow q \leq \frac{1}{2}$

PBGG: $((L, L), (d, u), p = \frac{2}{3}, q \leq \frac{1}{2})$.

<u>A.3b:</u>
Angenommen, der Sender spielt (R, L). Die beste Antwort des Empfängers darauf ist (u, d).

Die GG-Auszahlung des Senders t_1 nach (R, d) ist 5; wenn er abweicht (d.h. nach (L, u)), bekommt er 2. Also, t_1 hat keinen Anreiz abzuweichen.

Die GG-Auszahlung des Senders t_2 nach (L, u) ist 2; wenn er abweicht (d.h. nach (R, d)), bekommt er 3. Also, t_2 hat einen Anreiz abzuweichen.

Also, es gibt kein PBGG hier.

A.3c:

Die Strategie des Empfängers besteht weiterhin aus zwei Aktionen, eine nach L, eine nach R.