Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05
Dr. Steffen Dereich 23. Juli 2005

Juli – Klausur
Stochastik für Informatiker

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind nur die unbeschriebene Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung und die Quantiltabelle der Student-Verteilung zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **zwei Stunden**.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 6 Punkte

Ein Lottospiel besteht aus einer Ziehung von 3 Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 20 fortlaufend nummerierten Kugeln.

i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum zur Modellierung einer Ziehung an.

ii) Ein Spieler nennt vor der Ziehung die Zahlen von 3 Kugeln. Wie groß ist die W'keit, dass alle von dem Spieler genannten Kugeln in einer Ziehung gezogen werden?

iii) Wie groß ist die W'keit, dass der Spieler genau 2 richtige Kugeln rät?

iv) Wie groß ist die W'keit, dass die beiden ersten gezogenen Kugeln von dem Spieler genannt wurden?

2. Aufgabe 3 Punkte

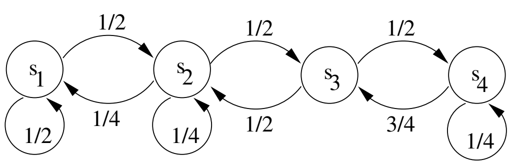
Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz einer zu den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ binomial verteilten Zufallsvariable X.

3. Aufgabe 4 Punkte

Geben Sie eine Verteilungsfunktion an, für die die zugehörige Zufallsvariable weder eine Dichte besitzt noch diskret ist. Berechnen Sie den Erwartungswert der von Ihnen gewählten Zufallsvariable.

4. Aufgabe 10 Punkte

Ein Server ist über drei Kanäle erreichbar. Die Auslastung des Servers wird durch eine Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit der folgenden graphisch dargestellten Übergangsmatrix modelliert:



Hierbei steht der Zustand s_i gerade für $i - 1$ belegte Kanäle.

i) Entscheiden Sie, ob die Markov-Kette aperiodisch, irreduzibel und reversibel ist.

ii) Bestimmen Sie alle invarianten Verteilungen der Markov-Kette.

iii) Sie senden nach 1000 Zeitschritten eine Anfrage an den Server. Mit welcher W'keit sind gerade alle Kanäle belegt?

iv) Die Auslastung des Servers zu einem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}_0$ wird durch die reelle Zufallsvariable Y_n gegeben durch

$$Y_n = \begin{cases} 0, & X_n = s_1 \\ 1, & X_n = s_2 \\ 2, & X_n = s_3 \\ 3, & X_n = s_4 \end{cases}$$

beschrieben. Wie groß ist die mittlere Auslastung $\bar{Y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Y_i$ für große n typischerweise?

5. Aufgabe

6 Punkte

Es seien $c, \gamma \geq 0$ zwei Parameter und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = c 1_{[0,\infty)}(x)\, x\, e^{-\gamma x}.$$

Wie müssen die Konstanten c und γ gewählt werden, damit f die Dichte einer Zufallsvariable X mit

$$E(X) = 1$$

ist?

6. Aufgabe

6 Punkte

Es seien $X_1, \ldots, X_{25}$ unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen mit unbekannten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$.

i) Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau $\alpha = 1\%$ auf der Basis der Beobachtung von $X_1, \ldots, X_{25}$ so explizit wie möglich an.

ii) Geben Sie einen Test zum Niveau $\alpha = 1\%$ der

- Hypothese $H_0 : \mu = 10$ gegen die
- Alternative $H_1 : \mu \neq 10$

an.

iii) Angenommen eine Stichprobe von 25 Realisierungen liefert den Mittelwert 11.5 und den Wert 4 für $\hat{s}_{25}^2$. Verwirft dann der Test aus Teil ii) die Hypothese?