Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05
Dr. Steffen Dereich 7. Oktober 2005

Oktober – Klausur
Stochastik für Informatiker

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind nur die unbeschriebene Verteilungstabelle der Standardnormalverteilung und die Quantiltabelle der Student-Verteilung zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **zwei Stunden**.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	7	Σ

1. Aufgabe 6 Punkte

Ein Quellmedium liefere unabhängige zu den Parametern $n = 3$ und $p = 1/4$ binomial-verteilte Zeichen $X_1, X_2, \ldots$.

i) Wieviel Bit benötigt ein gutes Kodierverfahren im Mittel pro Eingangssymbol? Es reicht das Ergebnis als Summe von expliziten Zahlen ohne Logarithmen hinzuschreiben.
Hinweis: Nutzen Sie die Approximation $\log_2 3 \approx 1,6$.

ii) Geben Sie den Huffman-Code für ein Eingangssignal X_1 an. Wieviel Bit benötigt das Verfahren im Mittel pro Eingangssymbol?

iii) Welche Beziehung besteht im Allgemeinen zwischen der optimal erreichbaren Codelänge pro Eingangssymbol und der vom Huffman-Code im Mittel benötigten Codelänge?

2. Aufgabe 4 Punkte

Berechnen Sie die Varianz einer zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilten Zufallsvariable X.
Hinweis: $E(X) = \lambda$.

3. Aufgabe 4 Punkte

Angenommen A und B bezeichnen zwei Ereignisse. Zeigen Sie:

$$P(A) \in \{0, 1\} \quad \Longrightarrow \quad A \text{ und } B \text{ sind unabhängig.}$$

Hinweis: Betrachten Sie beide Fälle getrennt voneinander.

4. Aufgabe 4 Punkte

Es bezeichnen X_1, X_2, X_3 unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit endlichen dritten Momenten. Stellen Sie den Erwartungswert

$$E(X_1(X_1 + X_2)(X_2 + X_3))$$

mithilfe von $\mu = E(X_1)$ und $\sigma^2 = \mathrm{var}(X_1)$ dar.

5. Aufgabe 6 Punkte

Es seien $c, a \geq 0$ zwei Parameter und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = c \max(x(a-x), 0).$$

i) Angenommen $a = 1$. Wie muss c gewählt werden damit f die Dichte einer Zufallsvariable ist?

ii) Wie müssen die Parameter a, c gewählt werden, damit f die Dichte einer Zufallsvariable X mit

$$E(X) = 1$$

ist?

iii) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable X mit Dichte wie in Aufgabenteil i).

6. Aufgabe 6 Punkte

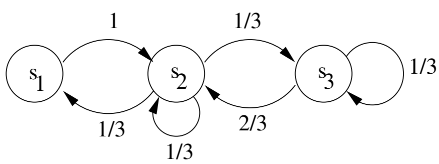
Eine Abfüllanlage befüllt Eimer mit weißer Farbe. Die Füllmenge wird durch unabhängige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ modelliert.

i) Angenommen der Abfüller kennt nicht den wahren Parameter σ^2 und er kann auch nicht den wahren Wert μ einstellen. Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Niveau $\alpha = 2\%$ auf der Basis der ZV'en $X_1, \ldots, X_{16}$ an. Welches Konfidenzintervall erhällt man, falls eine Stichprobe von 16 Eimern den Mittelwert 503 ml und den Wert 3 ml für $\hat{s}_{16}$ liefert?

ii) Angenommen die Varianz σ^2 ist $4\,\text{ml}^2$ und der Abfüller kann den wahren Erwartungswert μ an der Maschine einstellen. Wie muss er diesen wählen, damit im Mittel gerade 1% der Eimer weniger als 500 ml Farbe enthalten?

7. Aufgabe 5 Punkte

Es bezeichne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit der graphisch dargestellten Übergangsmatrix:



Berechnen Sie die invarianten Verteilungen der Markov-Kette.