Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Noemi Kurt/Dr. Selim Gökay

SoSe 2014
29. September 2014

Oktober-Klausur

Stochastik für Informatiker

Vorname: .... Name: ....

Matrikel-Nr. .... Studiengang: ....

Füllen Sie bitte zuerst dieses Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist.

Schreiben Sie auf jedes von Ihnen benutzte Blatt Papier sofort Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Mit 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf – wie angekündigt – ein beidseitig handbeschriebenes DIN A4-Blatt benutzt werden. Es sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in Reinschrift auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können nicht gewertet werden.

Geben Sie immer den vollständigen Rechenweg und/oder eine vollständige Begründung an. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 **10 Punkte**

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine homogene Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Stellen Sie die Markov-Kette graphisch dar und bestimmen Sie (mit Begründung), ob sie irreduzibel und/oder aperiodisch ist.

(b) Finden Sie alle invarianten Verteilungen der Markov-Kette.

(c) Die Markov-Kette startet im Zustand 2, d.h. $\mathbb{P}(X_0 = 2) = 1$. Bestimmen Sie die Verteilung der Kette nach einem Schritt und nach zwei Schritten.

(d) Die Markov-Kette hat die Startverteilung $\mathbb{P}(X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_0 = 3) = 1/2$. Berechnen Sie die Verteilung von X_{100} unter dieser Startverteilung.

(e) Ist die Grenzverteilung $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_\nu(X_n = x), x \in S$, der Kette unabhänging von der Startverteilung ν? Falls ja, begründen Sie, falls nein, geben Sie zwei verschiedene Grenzverteilungen für zwei verschiedene Startverteilungen an.

Aufgabe 2 **10 Punkte**

Es seien X und Y Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung gemäß folgender Tabelle gegeben ist:

Y \ X	0	1	Σ
0	1/6	1/6	
1	0	1/3	
2	1/3	0	
Σ			

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ sowie $\mathrm{var}(X)$ und $\mathrm{var}(Y)$. Berechnen Sie außerdem die bedingte Verteilung von Y gegeben $X = 0$.

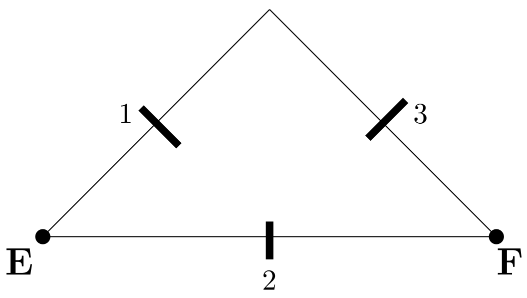
(b) Berechnen Sie $\mathrm{cov}(X, Y)$, und entscheiden Sie (mit Begründung), ob X und Y unabhängig sind.

(c) Es seien Z und W Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung gemäß folgender unvollständiger Tabelle gegeben ist:

W \ Z	0	1	Σ
0			1/2
1		1/4	
2	1/4		
Σ			

Vervollständigen Sie (mit Begründung) die Tabelle, falls $\mathbb{E}[Z] = 7/12$ ist.

Aufgabe 3 **10 Punkte**



Die Skizze stellt ein Schema zweier Gas-Pipelines dar, welche von E nach F führen. Mit Wahrscheinlichkeit 0.2 ist die Pipeline an Punkt 1 blockiert, mit Wahrscheinlichkeit 0.5 gibt es eine Blockade an Punkt 2, und mit Wahrscheinlichkeit 0.1 ist Punkt 3 blockiert. Die Blockaden finden unabhängig voneinander statt. A_i bezeichnet das Ereignis, dass Punkt i blockiert ist, $i \in \{1, 2, 3\}$.

(a) Beschreiben Sie in Worten die Ereignisse (i)$A_2 \cap A_3$, (ii)$A_2 \cup A_3$ und (iii)$A_1^c \cap (A_2 \cup A_3)$ und berechnen Sie für jedes dieser Ereignisse die Wahrscheinlichkeit.

(b) Bestimmen Sie, für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$, die Wahrscheinlichkeit, dass Gas von E nach F fließt, falls Punkt i blockiert ist.

(c) Bestimmten Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Gas von E nach F fließt.

(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Punkt 1 blockiert ist, falls *kein* Gas von E nach F fließt.

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} c_1(1 + x) & \text{falls } x \in [-1, 0[, \\ c_2(1 - x) & \text{falls } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten c_1 und c_2 so, dass f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist, und die zugehörige Verteilung den Erwartungswert 0 hat.

(b) Bestimmen Sie die zu f gehörige Verteilungsfunktion F.

(c) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte f. Berechnen Sie $\mathbb{P}(|X| \leq 1/2)$.

Aufgabe 5 **10 Punkte**

(a) Sei

$$f_\theta(x) := \frac{1}{2\theta^3} x^2 e^{-x/\theta}, \quad x \geq 0$$

die Dichte einer Zufallsvariablen mit unbekanntem $\theta > 0$. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für eine Stichprobe $x_1, ..., x_n$ dieser Zufallsvariable.

(b) Ist der in (a) bestimmte Schätzer erwartungstreu? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Gesamtpunktzahl: 50 Punkte