TU Berlin, Institut für Mathematik
SoSe 19

Prof. Dr. Noemi Kurt
András Tóbiás

Stochastik für Informatik, (6LP)
Klausur

19. Juli 2019

Name ______________________ Matrikelnummer ______________

Vorname ______________________ Studiengang ______________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie immer den *vollständigen* Rechenweg an und *begründen* Sie Ihre Lösungsschritte. Ihre Lösung muss auch ohne Taschenrechner nachvollzogen werden können. Der Taschenrechner dient lediglich der Ausführung von elementaren Rechenoperationen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 10 Punkte

Eine Urne enthält 4 rote und 6 weiße Kugeln. Es wird zwei Mal mit Zurücklegen gezogen. X bezeichne die Anzahl der roten gezogenen Kugeln, Y die Anzahl der weißen gezogenen Kugeln.

(a) Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y mit Randverteilung in einer Tabelle an.

(b) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y]$ und $\mathrm{cov}(X, Y)$. Sind X und Y unabhängig?

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[e^{2X+Y}]$.

Aufgabe 2 10 Punkte

Von einer Kita wird abends jedes Kind wie folgt abgeholt, jeweils unabhängig von den anderen Kindern[1]. Das Kind wird mit 40% Wahrscheinlichkeit von seiner Mutter abgeholt, und mit 60% Wahrscheinlichkeit von seinem Vater. Falls die Mutter das Kind abholt, kommt sie mit 15% Wahrscheinlichkeit zu spät zur Kita. Falls der Vater das Kind abholt, kommt er mit 20% Wahrscheinlichkeit zu spät.

(a) Wie groß die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmtes Kind zu spät von der Kita abgeholt wird?

(b) Falls ein bestimmtes Kind nicht zu spät von der Kita abgeholt wird, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es von seinem Vater abgeholt wird?

(c) Gegeben, dass zwei verschiedene Kinder von ihren Vätern abgeholt werden, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder zu spät abgeholt werden? Begründen Sie Ihre Aussage.

(d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eines von zwei Kindern nicht zu spät von der Kita abgeholt wird?

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $S = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie den Übergangsgraphen. Ist die Markov-Kette irreduzibel?

(b) Sei $Y = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \neq 1\}$. Welche Verteilung hat Y, wenn $X_0 = 1$ ist? Berechnen Sie außerdem $\mathbb{P}(X_n = 1 \mid X_0 = 1), n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie alle gegebenenfalls vorhandenen invarianten Verteilungen zu dieser Übergangsmatrix.

(d) Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = 1), j \in \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 4 10 Punkte

Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0, \\ \frac{x^3}{8} & \text{falls } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{falls } x > 2. \end{cases}$$

(a) Berechnen Sie den Wert der Dichte von X im Punkt $x = 0.5$.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und die Varianz $\mathbb{V}[X]$.

(c) Es sei Y eine von X abhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{V}[Y] = 1$ und $\mathbb{V}[X+Y] = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Kovarianz sowie die Korrelation von X und Y.

[1] Wir machen die vereinfachende Annahme, dass jedes Kind genau einen Vater und eine Mutter hat, und es keine Geschwister gibt

Aufgabe 5 10 Punkte

Ein stochastischer Algorithmus terminiert mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0.2$.

(a) Der Algorithmus wird 150 Mal aufgerufen. Sei X die Anzahl Läufe, bei denen er terminiert. Welche Verteilung hat X? Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{V}(X)$.

(b) Verwenden Sie eine geeignete Approximation, um in der Situation von (a) die Wahrscheinlichkeit für höchstens 20 Terminierungen zu berechnen.

(c) Y bezeichne die Anzahl Läufe, bis der Algorithmus zum ersten Mal terminiert. Welche Verteilung hat Y? Berechne $\mathbb{P}(Y \geq 10)$.

(d) Wie viele Male muss der Algorithmus aufgerufen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 40% mindestens eine Terminierung stattfindet?

Tabelle: $\Phi_{0,1}(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ für eine standardnormalverteilte Zufallsvariable X

z_α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998