TU Berlin, Institut für Mathematik
SoSe 19

Prof. Dr. Noemi Kurt
András Tóbiás

Stochastik für Informatik, (9LP)
Klausur

30. September 2019

Name ______________________ Matrikelnummer ______________

Vorname ______________________ Studiengang ______________

Informationen

Füllen Sie bitte zuerst das Deckblatt vollständig und leserlich aus. Vergewissern Sie sich, dass das Aufgabenblatt vollständig ist. Damit erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann. (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist. (§39 Abs. 2 AllgStuPO)
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Schreiben Sie auf *jedes* von Ihnen benutzte Papier *sofort* Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Bei der Klausur sind 50 Punkte erreichbar. Ab 25 Punkten ist die Klausur bestanden. Als Hilfsmittel darf, wie angekündigt, ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt sowie ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden. Weitere Hilfsmittel sind nicht zugelassen.

Geben Sie immer den *vollständigen* Rechenweg an und *begründen* Sie Ihre Lösungsschritte. Ihre Lösung muss auch ohne Taschenrechner nachvollzogen werden können. Der Taschenrechner dient lediglich der Ausführung von elementaren Rechenoperationen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

1	2	3	4	5	Σ

Aufgabe 1 10 Punkte

Ein Signal wird über einen von drei Kanälen A, B, C gesendet. Kanal A wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% ausgewählt, B und C jeweils mit 30%. Bei Kanal A kommt es mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % zu einem Übertragungsfehler, bei B mit 20% und bei C mit 15%. Für mehrere Signale sind sowohl die Auswahl des Kanals als auch das Auftreten von Übertragungsfehlern unabhängig voneinander.

(a) Stellen Sie die Situation als Baum dar. Schreiben Sie die im Aufgabentext gegebenen Wahrscheinlichkeiten an die richtigen Stellen im Baum.

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt ein gesendetes Signal korrekt an?

(c) Wenn ein Signal korrekt ankommt, mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde es über Kanal B geschickt?

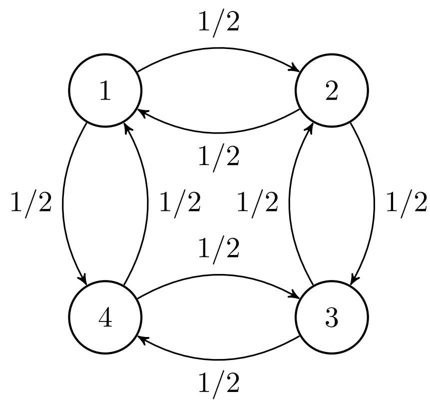
Es werden nun zwei verschiedene Signale gesendet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

(d) Mindestens ein Signal wird fehlerhaft übertragen.

(e) Beide Signale werden über denselben Kanal übertragen.

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette auf $S = \{1, 2, 3, 4\}$ mit Übergangsgraph



(a) Ist die Markov-Kette irreduzibel? Ist sie aperiodisch? (Begründen Sie).

(b) Bestimmen Sie alle möglicherweise vorhandenen invarianten Verteilungen.

Sei nun die Startverteilung $\nu = (1, 0, 0, 0)$, d.h. $X_0 = 1$.

(c) Geben Sie die Verteilung von X_1 und X_2 an.

(d) Geben Sie $\mathbb{P}(X_n = 1)$ und $\mathbb{P}(X_n = 4)$ jeweils allgemein für gerade und ungerade $n \in \mathbb{N}$ an. Was können Sie über $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1)$ aussagen?

Aufgabe 3 10 Punkte

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^{-x}, & x \in [0, 2] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass es sich bei f um eine Dichte einer Zufallsvariablen X handelt.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von X.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(1 \le X^2 \le 4)$.

(d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[\mathrm{e}^X]$.

Hinweis: Falls Sie Aufgabe (a) nicht lösen konnten, können Sie in die weiteren Aufgabenteile in Abhängigkeit von a lösen.

Aufgabe 4 10 Punkte

Die gemeinsame Verteilung von zwei Zufallsvariablen X, Y mit Werten in $\{1,2,3,4\}$ sowie die Randverteilung von Y sind in der folgenden Tabelle gegeben.

X \ Y	1	2	3	4
1	0.24	0.12	0.04	0
2	0.24	0.12	0	0.04
3	0.06	0.03	0.005	0.005
4	0.06	0.03	0.005	0.005
p_Y	0.6	0.3	0.05	0.05

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Y und Y^2.

(b) Sind X und Y unabhängig? Warum?

(c) Berechnen Sie die Kovarianz von Y und Y^2.

(d) Sei $g\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ eine Funktion definiert durch $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = g(4) = 3$. Geben Sie die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen $g(X)$ und $g(Y)$ sowie die Randverteilungen von $g(X)$ und $g(Y)$ an.

Aufgabe 5 10 Punkte

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_\theta(x) = \theta^2 x \, \mathrm{e}^{-\theta x}, \qquad x > 0,$$

wobei $\theta > 0$ ein unbekannter Parameter ist.

(a) Ermitteln Sie einen Schätzer für den Parameter θ mittels der Maximum-Likelihood-Methode und geben Sie die Schätzung an.

(b) Sei U gleichverteilt auf $[0,1]$. Geben Sie eine Funktion $g\colon [0,1] \to [1,4]$ an, sodass $g(U)$ auf $[1,4]$ gleichverteilt ist.

(c) Sei $\theta = 1$ bei obiger Dichte f_θ. Geben Sie den Monte-Carlo-Schätzer für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 4)$ mithilfe von 100 unabhängigen und auf $[1,4]$ gleichverteilten Zufallsvariablen $U_1, \ldots, U_{100}$ an.