TheGI 1: Grundlagen und algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 10. Februar 2009

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	20	24	24	22		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen.

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

Bei dieser Aufgabe gibt es *NUR* 10 Punkte; verlieren Sie also nicht zuviel Zeit!

(a) Welche der folgenden Mengen können oder müssen unendlich groß sein?

- ☐ Ein Alphabet $\mathcal{A}$.
- ☐ Eine Sprache A.
- ☐ Die Menge aller regulären Sprachen $\mathcal{L}_3$.
- ☐ Die Menge aller kontextsensitiven Sprachen $\mathcal{L}_1$.

(b) Welche Wörter enthält die Sprache A^*, wenn die Sprache A leer ist?

- ☐ A^* enthält keine Wörter.
- ☐ A^* enthält das Wort λ.
- ☐ A^* enthält unendlich viele Wörter.

(c) Sei $A = \mathrm{L}(G)$ eine reguläre Sprache, die durch eine Grammatik G beschrieben wird. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ G muss regulär sein.
- ☐ Wenn G **eine** reguläre Grammatik ist, dann muss G kontextfrei sein.
- ☐ Wenn G **keine** reguläre Grammatik ist, dann muss G kontextfrei sein.

(d) Sei $A = \mathrm{L}(G)$ eine Sprache, die durch eine kontextfreie Grammatik G beschrieben wird. Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Dann gibt es **immer** eine kontextsensitive Grammatik G' mit $\mathrm{L}(G') = A$.
- ☐ Dann gibt es **manchmal aber nicht immer** eine kontextsensitive Grammatik G' mit $\mathrm{L}(G') = A$.
- ☐ Dann gibt es **keine** kontextsensitive Grammatik G' mit $\mathrm{L}(G') = A$.

(e) Welche der folgenden Aussagen treffen für alle regulären Sprachen A zu?

- ☐ Es gibt (mindestens) einen regulären Ausdruck, der A beschreibt.
- ☐ **PUMP**(A).
- ☐ A ist endlich, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}.\ \#(A) = n$.

(f) Welche der folgenden Aussagen treffen für alle kontextfreien aber nicht regulären Sprachen A zu?

- ☐ Es gibt **keinen** regulären Ausdruck, der A beschreibt.
- ☐ $\neg$**PUMP**(A).
- ☐ Es gibt eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathrm{L}(G) = A$.
- ☐ A ist endlich, d.h. $\exists n \in \mathbb{N}.\ \#(A) = n$.

Aufgabe 2 **(20 Punkte)**

Gegeben seien die Signatur Σ_{Bool}, die Σ_{Bool}-Algebren A und B und das Variablensystem $X \triangleq (X_s)_{s\in\{bool\}}$ mit $X_{bool} \triangleq \{x\}$.

Σ_{Bool}	A	B
$bool$	$A_{bool} \triangleq \{0,1\}$	$B_{bool} \triangleq \mathbb{Z}$
$\bot : \lambda \to bool$	$\bot_A \triangleq 0$	$\bot_B \triangleq 0$
$\top : \lambda \to bool$	$\top_A \triangleq 1$	$\top_B \triangleq 1$
$\neg : bool \to bool$	$\neg_A : A_{bool} \to A_{bool}$ $y \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } y = 0 \\ 0, & \text{falls } y = 1 \end{cases}$	$\neg_B : B_{bool} \to B_{bool}$ $y \mapsto y + 1$
$\wedge : bool \cdot bool \to bool$	$\wedge_A : A_{bool} \times A_{bool} \to A_{bool}$ $(y,z) \mapsto y \cdot z$	$\wedge_B : B_{bool} \times B_{bool} \to B_{bool}$ $(y,z) \mapsto y \cdot z$

$y \cdot z$ steht in den Algebren A und B für die Multiplikation der Zahlen y und z.

1. (8 Punkte) Beweise die Aussage

$$P_1 \triangleq A \models (\ \wedge(x, \top) = x\ )$$

mit Hilfe der Funktion xeval. Gib dazu alle möglichen Variablenassignments für das Variablensystem X in der Algebra A an und prüfe für jede dieser Variablenassignments die Aussage P_1.

2. (12 Punkte) Beweise die Aussage

$$\forall t \in T_{\Sigma_{Bool},bool}.\ P_2(t) \ \text{ mit } \ P_2(t) \triangleq \text{eval}(B)_{bool}(t) \geq 0$$

nur mit Hilfe von struktureller Induktion.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 **(24 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$, die Signatur $\Sigma^{\mathcal{A}}_{regExp}$ und die $\Sigma^{\mathcal{A}}_{regExp}$-Algebra $E^{\mathcal{A}}$ aus der Formelsammlung, der reguläre Ausdruck

$$RA \triangleq \big((\mathsf{a} + \mathbf{0})\ (\mathsf{a}^*)\ \mathsf{a}\big)\ +\ \big((\mathsf{bb})^*\,(\epsilon + \mathsf{a})\big)$$

und die Sprache

$$A \triangleq \{w \in \mathcal{A}^* \mid (w = \mathsf{aa}^n\mathsf{a} \vee w = (\mathsf{bb})^m y) \wedge n, m \in \mathbb{N} \wedge y \in \{\lambda, \mathsf{a}\}\}\,.$$

1. (5 Punkte) Gib 5 verschiedene Wörter an, die in der Sprache A enthalten sind.
2. (2 Punkte) Gib 2 verschiedene Wörter aus $\mathcal{A}^*$ an, die nicht in der Sprache A enthalten sind.
3. (6 Punkte) Gib eine reguläre Grammatik G_A an, welche die Sprache A erzeugt.
4. (11 Punkte) Beweise mit Hilfe der $\Sigma^{\mathcal{A}}_{regExp}$-Algebra $E^{\mathcal{A}}$, dass der reguläre Ausdruck RA die Sprache A beschreibt.
   Begründe jeden Schritt. Anwendungen derselben Definition dürfen in einem Schritt zusammengefasst werden, das betrifft insbesondere auch die Anwendung der Definitionen von $\mathrm{term}^{\mathcal{A}}$ und $\mathrm{eval}(E^{\mathcal{A}})_{exp}$ und die Definitionen in $E^{\mathcal{A}}$.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Aufgabe 4 **(24 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}$ und die Grammatiken $G_i = (\{\mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{U}\}, \mathcal{A}, P_i, \mathsf{S})$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ mit

$$
\begin{array}{ll|ll}
P_1: & \mathsf{S} \to \mathsf{a} \mid \mathsf{b} \mid \mathsf{aT} & P_2: & \mathsf{S} \to \mathsf{aaSb} \mid \mathsf{SU} \mid \mathsf{aUb} \\
 & \mathsf{T} \to \mathsf{bS} & & \mathsf{aUb} \to \mathsf{ab} \mid \mathsf{bUa} \mid \mathsf{aaUbb} \\
 & & & \mathsf{ab} \to \mathsf{ba} \\
 & & & \\
P_3: & \mathsf{S} \to \lambda \mid \mathsf{aT} \mid \mathsf{Ub} & P_4: & \mathsf{S} \to \mathsf{T} \mid \mathsf{U} \mid \mathsf{TU} \\
 & \mathsf{T} \to \lambda \mid \mathsf{bT} & & \mathsf{T} \to \mathsf{a} \mid \mathsf{aTa} \mid \mathsf{bTb} \\
 & \mathsf{U} \to \mathsf{b} \mid \mathsf{aT} \mid \mathsf{Ub} & & \mathsf{U} \to \mathsf{b} \mid \mathsf{aUb} \mid \mathsf{bUa}
\end{array}
$$

1. (6 Punkte) Welche der Wörter λ, aba und ababb werden von der Grammatik G_1 erzeugt und welche nicht? Begründe Deine Antwort.
2. (4 Punkte) Gib einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathrm{L}(G_1)$ beschreibt.
3. (7 Punkte) Gib die Sprache $\mathrm{L}(G_4)$ als Menge an. Du kannst dazu die Funktion $\mathrm{alt} : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ mit

$$
\mathrm{alt}(w) = \begin{cases} \lambda, & \text{falls } w = \lambda \\ \mathsf{a} \cdot \mathrm{alt}(w'), & \text{falls } w = \mathsf{b} \cdot w' \\ \mathsf{b} \cdot \mathrm{alt}(w'), & \text{falls } w = \mathsf{a} \cdot w' \end{cases}
$$

   verwenden.
   Hinweis: $\mathrm{L}(G_4) = \left\{ w \in \{\mathsf{a}, \mathsf{b}\}^* \mid \mathsf{S} \Rightarrow^*_{G_4} w \right\}$ genügt an dieser Stelle nicht.
4. (7 Punkte) Gib die Typen der Grammatiken G_1, G_2, G_3 und G_4 nach Chomsky in der folgenden Tabelle an.

	Typ-0	Typ-1	Typ-2	Typ-3
G_1				
G_2				
G_3				
G_4				

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 5 **(22 Punkte)**

1. (15 Punkte) Beweise nur mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache

$$A \triangleq \left\{0^g 1^h \mid g, h \in \mathbb{N} \wedge g \geq h\right\}$$

   nicht regulär ist.

2. (7 Punkte)
   (a) Gib den „kleinsten“ Typ der Sprache A in der Chomsky Hierarchie an.
   (b) Untermauere Deine Behauptung durch die Angabe einer Grammatik G vom angegebenen Typ mit $\mathrm{L}(G) = A$.
   Hinweis: Die Angabe der Gramatik G für die Sprache A genügt hier. Es muss *nicht* bewiesen werden, dass für die angegebene Grammatik G tatsächlich $\mathrm{L}(G) = A$ gilt.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Name: Vorname: Matrikelnummer: