TheGI 1: Grundlagen und algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 09. Februar 2010

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

Bearbeitung Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**

Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.

Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Note
Punkte	30	18	35	17	100	
Erreicht						
Korrektor						

Aufgabe 1: Homomorphismen **(30 Punkte)**

1.a) Seien Σ_1 eine Signatur, X, Y und Z drei Σ_1-Algebren und seien $f : Y \to Z$ und $g : X \to Y$ zwei Σ_1-Homomorphismen. Beweise oder widerlege, dass es einen Σ_1-Homomorphismus $h : X \to Z$ gibt. **(2 Punkte)**

Gegeben seien die Signatur Σ_2 mit den Σ_2-Algebren A und B vom Algebrenblatt, die Familie von Abbildungen $h_1 : B \to A$ und der Homomorphismus $h_2 : A \to B$ mit

$$
\begin{aligned}
h_1 &\triangleq (h_{1s} : B_s \to A_s)_{s \in \{\,\mathsf{nat}\,\}} & \qquad h_2 &\triangleq (h_{2s} : A_s \to B_s)_{s \in \{\,\mathsf{nat}\,\}} \\
h_{1\mathsf{nat}} &: B_{\mathsf{nat}} \to A_{\mathsf{nat}} & h_{2\mathsf{nat}} &: A_{\mathsf{nat}} \to B_{\mathsf{nat}} \\
h_{1\mathsf{nat}} &\triangleq \{\, (n, |n|) \mid n \in B_{\mathsf{nat}} \,\} & h_{2\mathsf{nat}} &\triangleq \{\, (m, \mathsf{a}^m) \mid m \in A_{\mathsf{nat}} \,\}
\end{aligned}
$$

1.b) Gib (ohne Beweis) an, welche Bedingungen gelten müssen, damit die Familie von Abbildungen $h_1 : B \to A$ ein Σ_2-Homomorphismus ist. **(3 Punkte)**

Hinweis: Das Abschreiben der entsprechenden Definition aus der Formelsammlung genügt hier nicht. Gib an, was zu beweisen wäre.

1.c) Beweise, dass h_1 ein Σ_2-Homomorphismus ist. **(9 Punkte)**

Hinweis: $\forall x, y \in B_{\mathsf{nat}} \;.\; |x \cdot y| = |x| + |y|$ $(\star)$

1.d) Beweise, dass h_2 ein Isomorphismus ist. **(6 Punkte)**

Begründe jeden Schritt!

Gegeben seien die Signatur Σ_2 mit den Σ_2-Algebren A, C und D.

1.e) Gib (ohne Beweis) einen Σ_2-Homomorphismus $h_3 : A \to C$ an. **(2 Punkte)**

1.f) Beweise, dass es keinen Σ_2-Homomorphismus $h_4 : A \to D$ gibt. **(8 Punkte)**

Begründe jeden Schritt!

Aufgabe 2: Kongruenzen **(18 Punkte)**

2.a) Kreuze die richtige Antwort an: Sei $\Sigma_3 = (\{ s_1, s_2 \}, O, \mathrm{ar})$ eine Signatur mit zwei Sorten und sei W eine beliebige Σ_3-Algebra. Dann ist $K \triangleq (K_s \subseteq W_s \times W_s)_{s \in \{ s_1, s_2 \}}$ mit $K_{s_1} \subseteq W_{s_1} \times W_{s_1}$, $K_{s_1} \triangleq \Delta_{W_{s_1}}$, $K_{s_2} \subseteq W_{s_2} \times W_{s_2}$ und $K_{s_2} \triangleq \nabla_{W_{s_2}, W_{s_2}}$ immer eine Kongruenz auf A. **(1 Punkt)**

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Gegeben seien die Signatur Σ_4 mit den Σ_4-Algebren E und F und die Familien von Äquivalenzen K_1 und K_2 mit

K_1	$\triangleq$	$(K_{1s} \subseteq E_s \times E_s)_{s \in \{ \mathsf{nat}, \mathsf{set} \}}$	K_2	$\triangleq$	$(K_{2s} \subseteq F_s \times F_s)_{s \in \{ \mathsf{nat}, \mathsf{set} \}}$
$K_{1\mathsf{nat}}$	$\subseteq$	$E_{\mathsf{nat}} \times E_{\mathsf{nat}}$	$K_{2\mathsf{nat}}$	$\subseteq$	$F_{\mathsf{nat}} \times F_{\mathsf{nat}}$
$K_{1\mathsf{nat}}$	$\triangleq$	$\nabla_{E_{\mathsf{nat}}, E_{\mathsf{nat}}}$	$K_{2\mathsf{nat}}$	$\triangleq$	$\nabla_{F_{\mathsf{nat}}, F_{\mathsf{nat}}}$
$K_{1\mathsf{set}}$	$\subseteq$	$E_{\mathsf{set}} \times E_{\mathsf{set}}$	$K_{2\mathsf{set}}$	$\subseteq$	$F_{\mathsf{set}} \times F_{\mathsf{set}}$
$K_{1\mathsf{set}}$	$\triangleq$	$\{ (x, y) \mid x, y \in E_{\mathsf{set}} \wedge \lvert x \rvert = \lvert y \rvert \}$	$K_{2\mathsf{set}}$	$\triangleq$	$\{ (x, y) \mid x, y \in F_{\mathsf{set}} \wedge \#(x) = \#(y) \}$

2.b) Gib (ohne Beweis) an, welche Bedingungen gelten müssen, damit die Familie von Äquivalenzen K_1 eine Kongruenz auf der Σ_4-Algebra E ist. **(2 Punkte)**

Hinweis: Das Abschreiben der entsprechenden Definition aus der Formelsammlung genügt hier nicht. Gib an, was zu beweisen wäre.

2.c) Beweise, dass K_1 eine Kongruenz auf der Σ_4-Algebra E ist. **(8 Punkte)**

Hinweis: $\forall x, y \in E_{\mathsf{set}} \;.\; \lvert x \cdot y \rvert = \lvert x \rvert + \lvert y \rvert$ $(\star)$

2.d) Beweise, dass K_2 <u>keine</u> Kongruenz auf der Σ_4-Algebra F ist. **(7 Punkte)**

Begründe jeden Schritt!

Aufgabe 3: Grammatiken und reguläre Ausdrücke **(35 Punkte)**

3.a) Kreuze die richtige Antwort an: Es gibt eine Sprache, für die es eine reguläre, aber keine kontextfreie Grammatik gibt. **(1 Punkt)**

☐ Wahr.
☐ Falsch.

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \}$ und die Grammatiken $G_i = (\{ \mathsf{S}, \mathsf{T}, \mathsf{U} \}, \mathcal{A}, P_i, \mathsf{S})$ für $i \in \{ 1, 2, 3, 4 \}$ mit

$$\begin{array}{llll} P_1 : & \mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{aT} \mid \mathsf{Ta} \mid \mathsf{aaU} \\ & \mathsf{T} & \rightarrow & \mathsf{b} \mid \mathsf{bS} \mid \mathsf{Sb} \\ & \mathsf{U} & \rightarrow & \mathsf{bb} \mid \mathsf{bbS} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} P_2 : & \mathsf{S} & \rightarrow & \lambda \mid \mathsf{aT} \mid \mathsf{Ub} \\ & \mathsf{T} & \rightarrow & \mathsf{a} \mid \mathsf{Sa} \\ & \mathsf{U} & \rightarrow & \mathsf{b} \mid \mathsf{bS} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} P_3 : & \mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{aT} \mid \mathsf{bT} \\ & \mathsf{T} & \rightarrow & \mathsf{aU} \mid \mathsf{bU} \\ & \mathsf{U} & \rightarrow & \lambda \mid \mathsf{aU} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} P_4 : & \mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{aTa} \mid \mathsf{bTb} \\ & \mathsf{T} & \rightarrow & \lambda \mid \mathsf{aSa} \mid \mathsf{bSb} \\ & \mathsf{ab} & \rightarrow & \mathsf{ba} \\ & \mathsf{ba} & \rightarrow & \mathsf{ab} \end{array}$$

3.b) Gib die Typen der Grammatiken G_1, G_2, G_3 und G_4 nach Chomsky in der folgenden Tabelle an. Eine Begründung ist nicht notwendig. **(7 Punkte)**

	Typ-0	Typ-1	Typ-2	Typ-3
G_1				
G_2				
G_3				
G_4				

3.c) Gib eine Ableitung des Wortes abba in der Grammatik G_2 an. **(1 Punkt)**

3.d) Gib (ohne Beweis) jeweils zwei Wörter aus den Sprachen $\mathrm{L}(G_1)$, $\mathrm{L}(G_2)$, $\mathrm{L}(G_3)$ und $\mathrm{L}(G_4)$ an. **(4 Punkte)**

3.e) Gib die Sprachen $\mathrm{L}(G_1)$, $\mathrm{L}(G_2)$, $\mathrm{L}(G_3)$ und $\mathrm{L}(G_4)$ als Mengen an. **(9 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \}$, die Sprachen

$$A_1 \triangleq \left\{ vw^k \mid v \in \{ \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{ab}, \mathsf{bb} \} \land w \in \{ \mathsf{ab}, \mathsf{ba} \} \land k \in \mathbb{N} \right\} \text{ und}$$
$$A_2 \triangleq \{ vw \in \mathcal{A}^* \mid |v|_{\mathsf{a}} = |v|_{\mathsf{b}} \land |w|_{\mathsf{a}} = |w|_{\mathsf{b}} \}$$

und der reguläre Ausdruck

$$R_1 \triangleq \left(\mathbf{0} \, (\epsilon + \mathsf{a}) \, (\mathsf{a} + \mathsf{b})^* \, (\epsilon + \mathsf{b})\right)^* + \mathsf{a} \, (\mathsf{ba})^* \, \mathsf{b}.$$

3.f) Kreuze die richtige Antwort an: Kann man für die Sprache A_2 einen regulären Ausdruck angeben? **(1 Punkt)**

- ☐ Ja.
- ☐ Nein.

3.g) Gib einen regulären Ausdruck R_2 an, so dass $\mathrm{L}(R_2) = A_1$. **(2 Punkte)**

3.h) Gib eine reguläre Grammatik G_5 an, so dass $\mathrm{L}(G_5) = A_1$. **(5 Punkte)**

3.i) Gib eine kontextfreie Grammatik G_6 an, so dass $\mathrm{L}(G_6) = A_2$. **(5 Punkte)**

Aufgabe 4: Pumping Lemma (17 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

$$A \triangleq \{ w \in \{ \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d} \}^* \mid |w|_{\mathsf{a}} = |w|_{\mathsf{b}} \vee |w|_{\mathsf{c}} = |w|_{\mathsf{d}} \}$$

4.a) Beweise nur mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache A nicht regulär ist. **(15 Punkte)**

Hinweis: Es genügt hier nicht, das Wort $w = \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n$ zu wählen.

4.b) Gib den minimalen Typ der Sprache A aus der Chomsky Hierarchie an. **(2 Punkte)**

Hinweis: Typ-3 < Typ-2 < Typ-1 < Typ-0.

Begründe jeden Schritt!