TheGI 1: Grundlagen und algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 06. April 2010

2. Schriftliche Leistungskontrolle (EK-N)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung“. Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

Bearbeitung Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**

Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.

Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	Σ	Note
Punkte	28	18	39	15	100	
Erreicht						
Korrektor						

Aufgabe 1: Homomorphismen **(28 Punkte)**

1.a) Kreuze die richtige Antwort an: Seien Σ_1 eine beliebige Signatur, X und Y zwei Σ_1-Algebren und $f : X \to Y$ ein Σ_1-Homomorphismus. Gibt es dann immer einen Σ_1-Homomorphismus $h : Y \to X$? **(1 Punkt)**

- ☐ Ja.
- ☐ Nein.

Gegeben seien die Signatur Σ_2 mit den Σ_2-Algebren A und B vom Algebrenblatt, die Familie von Abbildungen $h_1 : A \to B$ und der Homomorphismus $h_2 : B \to A$ mit

$$\begin{array}{rcl} h_1 & \triangleq & (h_{1s} : A_s \to B_s)_{s \in \{\,\mathsf{nat},\mathsf{bool}\,\}} \\ h_{1\mathsf{nat}} & : & A_{\mathsf{nat}} \to B_{\mathsf{nat}} \\ h_{1\mathsf{nat}} & \triangleq & \{\,(n, \mathsf{a}^n) \mid n \in A_{\mathsf{nat}}\,\} \\ h_{1\mathsf{bool}} & : & A_{\mathsf{bool}} \to B_{\mathsf{bool}} \\ h_{1\mathsf{bool}} & \triangleq & \{\,(\mathsf{F},\mathsf{1}), (\mathsf{T},\mathsf{0})\,\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} h_2 & \triangleq & (h_{2s} : B_s \to A_s)_{s \in \{\,\mathsf{nat},\mathsf{bool}\,\}} \\ h_{2\mathsf{nat}} & : & B_{\mathsf{nat}} \to A_{\mathsf{nat}} \\ h_{2\mathsf{nat}} & \triangleq & \{\,(m, |m|) \mid m \in B_{\mathsf{nat}}\,\} \\ h_{2\mathsf{bool}} & : & B_{\mathsf{bool}} \to A_{\mathsf{bool}} \\ h_{2\mathsf{bool}} & \triangleq & \{\,(\mathsf{0},\mathsf{T}), (\mathsf{1},\mathsf{F})\,\} \end{array}$$

1.b) Gib (ohne Beweis) an, welche Bedingungen gelten müssen, damit die Familie von Abbildungen $h_1 : A \to B$ ein Σ_2-Homomorphismus ist. **(3 Punkte)**

Hinweis: Das Abschreiben der entsprechenden Definition aus der Formelsammlung genügt hier nicht. Gib an, was zu beweisen wäre. Erläuternder Text ist nicht nötig.

1.c) Beweise, dass h_1 ein Σ_2-Homomorphismus ist. **(10 Punkte)**

1.d) Beweise, dass es einen Σ_2-Homomorphismus $h_3 : A \to A$ gibt. **(2 Punkte)**

Begründe jeden Schritt!

Gegeben seien die Signatur Σ_2 mit den Σ_2-Algebren A und C.

1.e) Gib (ohne Beweis) einen Σ_2-Homomorphismus $h_4 : A \to C$ an. **(4 Punkte)**

1.f) Beweise, dass es keinen Σ_2-Homomorphismus $h_5 : C \to A$ gibt. **(8 Punkte)**

Begründe jeden Schritt!

Aufgabe 2: Kongruenzen **(18 Punkte)**

2.a) Kreuze die richtige Antwort an: Sei Σ_3 eine Signatur. Zu jeder Σ_3-Algebra gibt es eine Kongruenz. **(1 Punkt)**

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Gegeben seien die Signatur Σ_2 mit den Σ_2-Algebren A und B und die Familien von Äquivalenzen K_1 und K_2 mit

$$\begin{aligned} K_1 &\triangleq (K_{1s} \subseteq A_s \times A_s)_{s \in \{\,\mathsf{nat},\mathsf{bool}\,\}} \\ K_{1\mathsf{nat}} &\subseteq A_{\mathsf{nat}} \times A_{\mathsf{nat}} \\ K_{1\mathsf{nat}} &\triangleq \{\,(n,m) \mid n \bmod 2 = m \bmod 2\,\} \\ K_{1\mathsf{bool}} &\subseteq A_{\mathsf{bool}} \times A_{\mathsf{bool}} \\ K_{1\mathsf{bool}} &\triangleq \nabla_{A_{\mathsf{bool}},A_{\mathsf{bool}}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} K_2 &\triangleq (K_{2s} \subseteq A_s \times A_s)_{s \in \{\,\mathsf{nat},\mathsf{bool}\,\}} \\ K_{2\mathsf{nat}} &\subseteq A_{\mathsf{nat}} \times A_{\mathsf{nat}} \\ K_{2\mathsf{nat}} &\triangleq \{\,(n,m) \mid n \bmod 2 = m \bmod 2\,\} \\ K_{2\mathsf{bool}} &\subseteq A_{\mathsf{bool}} \times A_{\mathsf{bool}} \\ K_{2\mathsf{bool}} &\triangleq \Delta_{A_{\mathsf{bool}}} \end{aligned}$$

2.b) Gib (ohne Beweis) an, welche Bedingungen gelten müssen, damit die Familie von Äquivalenzen K_1 eine Kongruenz auf der Σ_2-Algebra A ist. **(2 Punkte)**

Hinweis: Das Abschreiben der entsprechenden Definition aus der Formelsammlung genügt hier nicht. Gib an, was zu beweisen wäre. Erläuternder Text ist nicht nötig.

2.c) Beweise, dass K_1 eine Kongruenz auf der Σ_2-Algebra A ist. **(6 Punkte)**

Hinweis:
$$\forall x, y \in A_{\mathsf{nat}} \;.\; x \bmod 2 = y \bmod 2 \;\Rightarrow\; (x+1) \bmod 2 = (y+1) \bmod 2 \qquad (\star)$$

2.d) Beweise, dass K_2 <u>keine</u> Kongruenz auf der Σ_2-Algebra A ist. **(7 Punkte)**

2.e) Beweise, dass es eine Kongruenz K_3 auf der Σ_2-Algebra B gibt. **(2 Punkte)**

Begründe jeden Schritt!

Aufgabe 3: Grammatiken und reguläre Ausdrücke **(39 Punkte)**

3.a) Kreuze die richtige Antwort an: Für jede Sprache, die durch eine kontextfreie Grammatik beschrieben werden kann, gibt es auch eine kontextsensitive Grammatik. **(1 Punkt)**

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{\,\mathsf{a},\mathsf{b}\,\}$ und die Grammatiken $G_i = (\{\,\mathsf{S},\mathsf{T},\mathsf{U}\,\},\mathcal{A},P_i,\mathsf{S})$ für $i \in \{\,1,2,3,4\,\}$ mit

$$
\begin{array}{rcrcl}
P_1 & : & \mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{b} \mid \mathsf{abS} \mid \mathsf{baS} \\
 & & \mathsf{ab} & \rightarrow & \mathsf{ba} \\
 & & \mathsf{ba} & \rightarrow & \mathsf{ab}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcl}
P_2 & : & \mathsf{S} & \rightarrow & \mathsf{aT} \mid \mathsf{Sb} \\
 & & \mathsf{T} & \rightarrow & \lambda \mid \mathsf{aU} \mid \mathsf{Tb} \\
 & & \mathsf{U} & \rightarrow & \mathsf{aS} \mid \mathsf{Ub}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcrcl}
P_3 & : & \mathsf{S} & \rightarrow & \lambda \mid \mathsf{aT} \\
 & & \mathsf{T} & \rightarrow & \mathsf{aU} \mid \mathsf{bS} \\
 & & \mathsf{U} & \rightarrow & \mathsf{aS} \mid \mathsf{bU}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcl}
P_4 & : & \mathsf{S} & \rightarrow & \lambda \mid \mathsf{aTa} \\
 & & \mathsf{T} & \rightarrow & \mathsf{bSb}
\end{array}
$$

3.b) Gib die Typen der Grammatiken G_1, G_2, G_3 und G_4 nach Chomsky in der folgenden Tabelle an. Trage dazu in jedes Feld entweder einen Haken ✓ (die Grammatik hat diesen Typ) oder einen Strich – (die Grammatik hat diesen Typ nicht) ein. **Leere Felder bringen keine Punkte.** Eine Begründung ist nicht notwendig. **(7 Punkte)**

	Typ 0	Typ 1	Typ 2	Typ 3
G_1				
G_2				
G_3				
G_4				

3.c) Gib eine Ableitung des Wortes abaaba in der Grammatik G_3 an. **(1 Punkt)**

3.d) Gib (ohne Beweis) jeweils zwei Wörter aus den Sprachen $\mathrm{L}(G_1)$, $\mathrm{L}(G_2)$, $\mathrm{L}(G_3)$ und $\mathrm{L}(G_4)$ an. **(4 Punkte)**

3.e) Gib die Sprachen $\mathrm{L}(G_1)$, $\mathrm{L}(G_2)$, $\mathrm{L}(G_3)$ und $\mathrm{L}(G_4)$ als Mengen an. **(9 Punkte)**

3.f) Kreuze die richtige Antwort an: Mit dem Pumping Lemma kann man beweisen, dass eine Sprache regulär ist. **(1 Punkt)**

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \}$, die Sprachen

$$A_1 \triangleq \left\{ v^2 w^k \mid v \in \mathcal{A} \wedge w \in \{ \mathsf{ab}, \mathsf{a} \} \wedge k \in \mathbb{N} \right\}^* \text{ und}$$
$$A_2 \triangleq \{ w \in \mathcal{A}^+ \mid |w|_\mathsf{a} < |w|_\mathsf{b} \}$$

und der reguläre Ausdruck

$$R_1 \triangleq \left(\mathbf{0}\,(\epsilon + \mathsf{a})\,(\mathsf{a} + \mathsf{b})^*\,(\epsilon + \mathsf{b})\right)^* + \mathsf{a}\,(\mathsf{ba})^*\,\mathsf{b}.$$

3.g) Gib einen regulären Ausdruck R_2 an, so dass $\mathrm{L}(R_2) = A_1$. **(3 Punkte)**

3.h) Gib eine reguläre Grammatik G_5 an, so dass $\mathrm{L}(G_5) = A_1$. **(5 Punkte)**

3.i) Gib die Sprache $A_3 = \mathrm{L}^{\mathcal{A}}(R_1)$ als Menge an. **(3 Punkte)**

3.j) Gib eine kontextfreie Grammatik G_6 an, so dass $\mathrm{L}(G_6) = A_2$. **(5 Punkte)**

Aufgabe 4: Pumping Lemma (15 Punkte)

Gegeben sei die Sprache

$$A \triangleq \{\, w \in \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \,\}^* \mid (|w|_{\mathsf{a}} < |w|_{\mathsf{b}} < |w|_{\mathsf{c}}) \vee (|w|_{\mathsf{a}} > |w|_{\mathsf{b}} > |w|_{\mathsf{c}}) \,\}$$

Beweise nur mit Hilfe des Pumping Lemmas, dass die Sprache A nicht regulär ist.

Begründe jeden Schritt!

Algebrenblatt zur 2. schriftlichen Leistungskontrolle (EK-N)

Signatur Σ_2 mit den Σ_2-Algebren A, B und C:

Σ_2	A	B	C
nat bool	$A_{\mathsf{nat}} \triangleq \mathbb{N}$ $A_{\mathsf{bool}} \triangleq \{\,\mathsf{F},\mathsf{T}\,\}$	$B_{\mathsf{nat}} \triangleq \{\,\mathsf{a}\,\}^*$ $B_{\mathsf{bool}} \triangleq \{\,0,1\,\}$	$C_{\mathsf{nat}} \triangleq \{\,\mathsf{a},\mathsf{b}\,\}$ $C_{\mathsf{bool}} \triangleq \{\,\mathsf{a},\mathsf{b}\,\}^*$
z : (nat)	$\mathsf{z}_A : A_{\mathsf{nat}}$ $\mathsf{z}_A \triangleq 0$	$\mathsf{z}_B : B_{\mathsf{nat}}$ $\mathsf{z}_B \triangleq \lambda$	$\mathsf{z}_C : C_{\mathsf{nat}}$ $\mathsf{z}_C \triangleq \mathsf{a}$
s : (nat, nat)	$\mathsf{s}_A : A_{\mathsf{nat}} \to A_{\mathsf{nat}}$ $x \mapsto x+1$	$\mathsf{s}_B : B_{\mathsf{nat}} \to B_{\mathsf{nat}}$ $x \mapsto (\mathsf{a}) \cdot x$	$\mathsf{s}_C : C_{\mathsf{nat}} \to C_{\mathsf{nat}}$ $x \mapsto \begin{cases} \mathsf{b} & \text{falls } x = \mathsf{a} \\ \mathsf{a} & \text{falls } x = \mathsf{b} \end{cases}$
leq : (nat, nat, bool)	$\mathsf{leq}_A : A_{\mathsf{nat}} \times A_{\mathsf{nat}} \to A_{\mathsf{bool}}$ $(x,y) \mapsto \begin{cases} \mathsf{T} & \text{falls } x \leq y \\ \mathsf{F} & \text{falls } x > y \end{cases}$	$\mathsf{leq}_B : B_{\mathsf{nat}} \times B_{\mathsf{nat}} \to B_{\mathsf{bool}}$ $(x,y) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } \lvert x\rvert \leq \lvert y\rvert \\ 1 & \text{falls } \lvert x\rvert > \lvert y\rvert \end{cases}$	$\mathsf{leq}_C : C_{\mathsf{nat}} \times C_{\mathsf{nat}} \to C_{\mathsf{bool}}$ $(x,y) \mapsto \lambda$