TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 15. Dezember 2009

Schriftliche Leistungskontrolle (ZK)

Hinweise:

- Ihr dürft nur die Abschnitte 1 bis 2.4 der Formelsammlung verwenden.
- Für diese schriftliche Leistungskontrolle gelten alle Hinweise, die in der Ankündigung der Kontrolle aufgelistet waren. Diese Hinweise sind bei Bedarf während der Leistungskontrolle verfügbar (Handzeichen genügt).

Studentenidentifikation:

Nachname	
Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Tutor	

Aufgabenübersicht:

Aufgabe	Seite	Punkte	Themenbereich
1	2	8	Menge
2	3	15	Bijektion
3	4	27	Relation und Quotient
4	5	35	Struktur und Auswertung
5	8	15	Strukturelle Induktion

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	8	15	27	35	15	100
Erreicht						
Korrektor						
Einsicht						

Aufgabe 1: Menge ***(8 Punkte)***

(*) *Beweise:* $\forall A, B \,.\; (A \uplus \emptyset) \cup (\emptyset \uplus B) = A \uplus B$
Es darf vorausgesetzt werden, dass für alle Mengen M gilt
(1): $\emptyset = \emptyset \times M = M \times \emptyset$ und
(2): $M = \emptyset \cup M = M \cup \emptyset$.
Hinweis: Begründe jeden Schritt deiner schrittweisen Lösung.

Aufgabe 2: Bijektion ***(15 Punkte)***

(**) *Beweise:* Für alle Bijektionen $f : A \to B$ und $g : C \to D$
existiert eine Bijektion $h : A \times C \to B \times D$.
Beweise also, dass folgende Formel gilt:

$$\forall f : A \to B, g : C \to D \; . \\ (\text{bijektiv}(f) \land \text{bijektiv}(g)) \Rightarrow (\exists h : A \times C \to B \times D \; . \; \text{bijektiv}(h))$$

Hinweis: Falls Proposition 1.3.8 vewendet wird, genügt es in dieser Aufgabe eine der beiden Bedingungen zu beweisen.

Aufgabe 3: Relation und Quotient *(27 Punkte)*

a. *(16 Punkte)* (*)
Seien $R_1, R_2 \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch

$$R_1 \triangleq \{ \ (\ x, \ y \ ) \ \mid \ x + 2 = y \ \}$$
$$R_2 \triangleq \mathrm{t}(\mathrm{s}(\mathrm{r}(R_1)))$$

i) *Visualisiere:* $R_1 \cap ([0, 5] \times [0, 5])$.
ii) *Visualisiere:* $R_2 \cap ([0, 5] \times [0, 5])$.
iii) *Gib an:* Eine elementweise Darstellung der Äquivalenzklassen des Quotienten $\mathbb{Z}/R_2$.
iv) *Gib an:* Ein Repräsentantensystem S zu $\mathbb{Z}/R_2$.
v) (***) *Gib an:* Eine *maximale* Menge B, so dass es *keine* totale Abbildung $f : \mathbb{Z} \to B$ mit $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{Z}/R_2$ gibt.

b. *(11 Punkte)* (***)
Seien $f, g, i, s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ beliebig mit surjektiv(s), injektiv(i) und $i \circ f \circ s = i \circ g \circ s$.
Beweise: $R \triangleq \{ \ (\ x, \ y \ ) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ f(x) = g(y) \ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 4: Struktur und Auswertung *(35 Punkte)*

Wir definieren zwei totale Abbildungen, die ein nichtleeres Wort über $\{\,0,\ 1\,\}$ in das erste Zeichen (den head) und den Rest (den tail) zerlegen können.

$$\mathrm{head} : \{\,0,\ 1\,\}^* \setminus \{\,\lambda\,\} \to \{\,0,\ 1\,\} \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1$$
$$\mathrm{tail} : \{\,0,\ 1\,\}^* \setminus \{\,\lambda\,\} \to \{\,0,\ 1\,\}^* \qquad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_2, \ldots, x_n)$$

Die Signatur Σ mit Σ-Algebra A ist wie folgt definiert.

Σ	A
data	$A_{\mathsf{data}} \triangleq \{\,0,\ 1\,\}$
coll	$A_{\mathsf{coll}} \triangleq \{\,0,\ 1\,\}^*$
test	$A_{\mathsf{test}} \triangleq \mathbb{N}$
nil : (coll)	$\mathsf{nil}_A : A_{\mathsf{coll}}$ $\mathsf{nil}_A \triangleq \lambda$
zero : (data)	$\mathsf{zero}_A : A_{\mathsf{data}}$ $\mathsf{zero}_A \triangleq 0$
one : (data)	$\mathsf{one}_A : A_{\mathsf{data}}$ $\mathsf{one}_A \triangleq 1$
cnt : (data, coll, test)	$\mathsf{cnt}_A : A_{\mathsf{data}} \times A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{test}}$ $(\,x,\ y\,) \mapsto \begin{cases} 0 & , y = \lambda \\ 1 + \mathsf{cnt}_A(x, \mathrm{tail}(y)) & , y \neq \lambda, \mathrm{head}(y) = x \\ \mathsf{cnt}_A(x, \mathrm{tail}(y)) & , \text{sonst} \end{cases}$
make : (data, coll)	$\mathsf{make}_A : A_{\mathsf{data}} \to A_{\mathsf{coll}}$ $x \mapsto x$
conc : (coll, coll, coll)	$\mathsf{conc}_A : A_{\mathsf{coll}} \times A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{coll}}$ $(\,x,\ y\,) \mapsto x \cdot y$
add : (coll, coll, coll)	$\mathsf{add}_A : A_{\mathsf{coll}} \times A_{\mathsf{coll}} \to A_{\mathsf{coll}}$ $(\,x,\ y\,) \mapsto \begin{cases} x \cdot y & , \lambda \in \{\,x,\ y\,\} \\ 0 \cdot \mathsf{add}_A(\mathrm{tail}(x), \mathrm{tail}(y)) & , P_0 \\ 1 \cdot \mathsf{add}_A(\mathrm{tail}(x), \mathrm{tail}(y)) & , P_1 \\ 0 \cdot \mathsf{add}_A(\mathsf{add}_A(\mathrm{tail}(x), \mathrm{tail}(y)), 1) & , P_2 \end{cases}$

mit $P_0 \triangleq \lambda \notin \{\,x,\ y\,\} \wedge (\mathrm{head}(x) + \mathrm{head}(y) = 0)$
$P_1 \triangleq \lambda \notin \{\,x,\ y\,\} \wedge (\mathrm{head}(x) + \mathrm{head}(y) = 1)$
$P_2 \triangleq \lambda \notin \{\,x,\ y\,\} \wedge (\mathrm{head}(x) + \mathrm{head}(y) = 2)$

- $\mathsf{cnt}_A(x, y)$ ist die Anzahl der Vorkommen des Symbols x in dem Wort y.
- $\mathsf{add}_A(x, y)$ ist die Addition der beiden Binärworte x und y. Das höchstwertige Bit steht ganz *rechts*, daher wird *links* mit der Addition angefangen.
  Beispiel: $\mathsf{add}_A(1010, 1101) = 00001$

Das Variablensystem X und die Variablenbelegung α sind wie folgt definiert.

$$X \triangleq (X_s)_{s \in \{\,\mathsf{data},\ \mathsf{coll},\ \mathsf{test}\,\}} \qquad \alpha : X \to A$$
$$X_{\mathsf{data}} \triangleq \{\,\mathsf{d}\,\} \qquad \alpha \triangleq (\alpha_s : X_s \to A_s)_{s \in \{\,\mathsf{data},\ \mathsf{coll},\ \mathsf{test}\,\}}$$
$$X_{\mathsf{coll}} \triangleq \{\,\mathsf{c}_1,\ \mathsf{c}_2\,\} \qquad \alpha_{\mathsf{data}} \triangleq \{\,(\,\mathsf{d},\ 1\,)\,\} \subseteq X_{\mathsf{data}} \times A_{\mathsf{data}}$$
$$X_{\mathsf{test}} \triangleq \{\,\mathsf{t}\,\} \qquad \alpha_{\mathsf{coll}} \triangleq \{\,(\,\mathsf{c}_1,\ 010\,),\ (\,\mathsf{c}_2,\ 1101\,)\,\} \subseteq X_{\mathsf{coll}} \times A_{\mathsf{coll}}$$
$$\alpha_{\mathsf{test}} \triangleq \{\,(\,\mathsf{t},\ 17\,)\,\} \subseteq X_{\mathsf{test}} \times A_{\mathsf{test}}$$

a. *(5 Punkte)* (*)
Gib die Menge von Grundtermen zur Sorte coll explizit an.
Hinweis: Die allgemeine Definition aus der Formelsammlung ist nicht gefragt.

$$T_{\Sigma,\mathsf{coll}} =$$

b. *(7 Punkte)* (*)
Berechne: $\mathrm{xeval}_{\mathsf{coll}}^{\alpha,A}(\mathsf{add}(\mathsf{conc}(\mathsf{make}(\mathsf{d}), \mathsf{c}_1), \mathsf{c}_2))$
Hinweis: Gib mindestens drei bedeutsame Schritte an.

c. *(7 Punkte)* (*)
Gib an: $\beta : X \to A$, so dass $\mathrm{xeval}_{\mathsf{coll}}^{\beta,A}(\mathsf{add}(\mathsf{conc}(\mathsf{make}(\mathsf{d}), \mathsf{c}_1), \mathsf{c}_2)) = \mathsf{011110}$.

d. *(10 Punkte)* (*)
Gib an: zu jedem Grundterm t jeweils einen weiteren Grundterm t', so dass die Anzahl an Operatornamen in t' minimal ist und $A \models t = t'$ gilt.

Beispiel:

$\mathsf{conc}(\mathsf{nil}, \mathsf{nil})$
$= \mathsf{nil}$

Aufgabe:

$\mathsf{add}(\mathsf{make}(\mathsf{zero}), \mathsf{make}(\mathsf{zero}))$
$=$

$\mathsf{add}(\mathsf{make}(\mathsf{one}), \mathsf{conc}(\mathsf{nil}, \mathsf{make}(\mathsf{zero})))$
$=$

$\mathsf{add}(\mathsf{conc}(\mathsf{make}(\mathsf{zero}), \mathsf{make}(\mathsf{zero})), \mathsf{make}(\mathsf{one}))$
$=$

$\mathsf{add}(\mathsf{conc}(\mathsf{make}(\mathsf{one}), \mathsf{make}(\mathsf{zero})), \mathsf{conc}(\mathsf{make}(\mathsf{zero}), \mathsf{make}(\mathsf{one})))$
$=$

e. *(6 Punkte)* (***)
Gib an: Eine *minimale* Untersignatur Σ' von Σ, so dass $\text{surjektiv}(\text{eval}_{\mathsf{test}}^{A\restriction_{\Sigma'}})$ gilt.
Minimal bedeutet hier, dass für jede echte Untersignatur Σ'' von Σ' die Aussage $\text{surjektiv}(\text{eval}_{\mathsf{test}}^{A\restriction_{\Sigma''}})$ nicht gilt.
Hinweis: Überlege gegebenenfalls zunächst für die Trägermengenelemente 0, 1 *und* 2 *durch welche Grundterme sie erzeugt werden können.*

Aufgabe 5: Strukturelle Induktion ***(15 Punkte)***

(**) Gegeben sei folgende Signatur Σ mit Σ-Algebra A.

Σ	A
input	$A_{\mathsf{input}} \triangleq \mathbb{N}$
output	$A_{\mathsf{output}} \triangleq \mathbb{N}$
$\mathsf{zero} : (\ \mathsf{input}\ )$	$\mathsf{zero}_A\ :\ A_{\mathsf{input}}$ $\mathsf{zero}_A \triangleq 0$
$\mathsf{succ} : (\ \mathsf{input},\ \mathsf{input}\ )$	$\mathsf{succ}_A\ :\ A_{\mathsf{input}} \rightarrow A_{\mathsf{input}}$ $x \mapsto x + 1$
$\mathsf{make} : (\ \mathsf{input},\ \mathsf{output}\ )$	$\mathsf{make}_A\ :\ A_{\mathsf{input}} \rightarrow A_{\mathsf{output}}$ $x \mapsto x$
$\mathsf{fak} : (\ \mathsf{output},\ \mathsf{output}\ )$	$\mathsf{fak}_A\ :\ A_{\mathsf{output}} \rightarrow A_{\mathsf{output}}$ $x \mapsto \begin{cases} x * \mathsf{fak}_A(x-1) & ,\ x \geq 1 \\ 1 & ,\ \text{sonst} \end{cases}$

Beweise:

$$\forall s \in \{\ \mathsf{input},\ \mathsf{output}\ \}\ .\ \forall t \in T_{\Sigma,s}\ .\ t \in T_{\Sigma,\mathsf{input}} \Rightarrow P(t)$$

mit

$$P(t) \triangleq \mathrm{eval}^{A}_{\mathsf{output}}(\mathsf{fak}(\mathsf{make}(t))) \geq 1$$

Hinweis: Das verwendete Induktionsschema muss in dieser Aufgabe nur angegeben werden, falls es sich nicht aus der restlichen Lösung eindeutig ergibt.

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :

Matrikelnummer: ____________________ *Name:* ____________________

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :

Teilaufgabe __ :