TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 15. Februar 2011

Schriftliche Leistungskontrolle (EK)

Hinweis:

- Für diese schriftliche Leistungskontrolle gelten alle Hinweise, die in der Ankündigung der Kontrolle aufgelistet waren. Diese Hinweise sind bei Bedarf während der Leistungskontrolle verfügbar (Handzeichen genügt).

Studentenidentifikation:

Nachname	
Vorname	
Matrikelnummer	
Studiengang	☐ Informatik Bachelor, ☐ ________________
Tutor	☐ Christina, ☐ Florian, ☐ Katja, ☐ Mascha, ☐ Paul ☐ Sarkaft, ☐ Sven, ☐ Tim, ☐ Tsveti, ☐ Uwe

Aufgabenübersicht:

Aufgabe	Seite	Punkte	Themenbereich
1	2	22	Homomorphismen
2	5	26	Kongruenzen
3	8	33	Grammatiken
4	12	15	Reguläre Ausdrücke
5	14	4	Pumping Lemma

Korrektur:

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte	22	26	33	15	4	100
Erreicht						
Korrektor						
Einsicht						

Aufgabe 1: Homomorphismen ***(22 Punkte)***

Gegeben seien die Signatur Σ_{foo} und die Σ_{foo}-Algebren A und B:

Σ_{foo}	A	B
s	$A_{\mathsf{s}} \triangleq \mathbb{R}$	$B_{\mathsf{s}} \triangleq \mathbb{N}$
$\mathsf{const} : (\ \mathsf{s}\ )$	$\mathsf{const}_A : A_{\mathsf{s}}$ $\mathsf{const}_A \triangleq 0$	$\mathsf{const}_B : B_{\mathsf{s}}$ $\mathsf{const}_B \triangleq 0$
$\mathsf{one} : (\ \mathsf{s},\ \mathsf{s}\ )$	$\mathsf{one}_A : A_{\mathsf{s}} \to A_{\mathsf{s}}$ $x \mapsto x + 1$	$\mathsf{one}_B : B_{\mathsf{s}} \to B_{\mathsf{s}}$ $x \mapsto x + 1$
$\mathsf{two} : (\ \mathsf{s},\ \mathsf{s},\ \mathsf{s}\ )$	$\mathsf{two}_A : A_{\mathsf{s}} \times A_{\mathsf{s}} \to A_{\mathsf{s}}$ $(x, y) \mapsto x + y$	$\mathsf{two}_B : B_{\mathsf{s}} \times B_{\mathsf{s}} \to B_{\mathsf{s}}$ $(x, y) \mapsto x + y$

a. *(7 Punkte)* (*)
   Beweise oder widerlege: Es existiert ein Σ_{foo}-Homomorphismus $f : B \to A$.
   Hinweis: Falls f existiert, muss nur die Operationsverträglichkeit explizit nachgewiesen werden.

b. *(10 Punkte)* (***)
Beweise oder widerlege: Es existiert ein Σ_{foo}-Homomorphismus $g : A \to B$.
Hinweis: Falls g existiert, muss nur die Operationsverträglichkeit explizit nachgewiesen werden.

c. *(5 Punkte)* (*)
Beweise oder widerlege: Es existiert ein Σ_{foo}-*Iso*morphismus $h : B \to A$.

Aufgabe 2: Kongruenzen ***(26 Punkte)***

Gegeben seien die folgende Signatur und Algebren:

Σ_{bar}	A	B
low	$A_{\mathsf{low}} \triangleq \mathbb{N}$	$B_{\mathsf{low}} \triangleq \{ a, b \}^*$
high	$A_{\mathsf{high}} \triangleq \mathcal{P}(\mathbb{N})$	$B_{\mathsf{high}} \triangleq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
bot : (low)	$\mathsf{bot}_A : A_{\mathsf{low}}$ $\mathsf{bot}_A \triangleq 0$	$\mathsf{bot}_B : B_{\mathsf{low}}$ $\mathsf{bot}_B \triangleq \lambda$
top : (high)	$\mathsf{top}_A : A_{\mathsf{high}}$ $\mathsf{top}_A \triangleq \emptyset$	$\mathsf{top}_B : B_{\mathsf{high}}$ $\mathsf{top}_B \triangleq (0,0)$
one : (high, low)	$\mathsf{one}_A : A_{\mathsf{high}} \to A_{\mathsf{low}}$ $X \mapsto \begin{cases} 0 & \text{, falls } X = \emptyset \\ \min(X) & \text{, sonst} \end{cases}$	$\mathsf{one}_B : B_{\mathsf{high}} \to B_{\mathsf{low}}$ $(x,y) \mapsto a^x b^y$
two : (low, high, high)	$\mathsf{two}_A : A_{\mathsf{low}} \times A_{\mathsf{high}} \to A_{\mathsf{high}}$ $(a, X) \mapsto \{ a \} \cup X$	$\mathsf{two}_B : B_{\mathsf{low}} \times B_{\mathsf{high}} \to B_{\mathsf{high}}$ $(w,(x,y)) \mapsto (x + \lvert w \rvert_a, y + \lvert w \rvert_b)$

Wobei min das kleinste Element einer Teilmenge von $\mathbb{N}$ liefert.

a. *(9 Punkte)* (**)

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?
Für jedes falsche Kreuz bekommst Du einen Punkt Abzug.
Bei dieser Teilaufgabe bekommst Du mindestens 0 Punkte.

☐ richtig - ☐ falsch $\mathsf{one}_A(\mathbb{N}) = 0$
☐ richtig - ☐ falsch $\mathsf{one}_A(\{ 2, 5, 4, 1, 8, 2, 7 \}) = \{ 1 \}$
☐ richtig - ☐ falsch $\forall n \in \mathbb{N}.\mathsf{two}_A(n, \{ 1, 2, 3 \}) \neq \{ 1, 2, 3 \}$
☐ richtig - ☐ falsch $\mathsf{one}_B((3,1)) = aaabbb$
☐ richtig - ☐ falsch $\mathsf{one}_B(\mathsf{top}_B) = \mathsf{bot}_B$
☐ richtig - ☐ falsch $\mathsf{two}_B(aba, (21,41)) = (22,43)$
☐ richtig - ☐ falsch $\forall (x,y) \in B_{\mathsf{high}}.\mathsf{two}_B(\lambda, (x,y)) = (x,y)$
☐ richtig - ☐ falsch $\forall w \in B_{\mathsf{low}}.\mathsf{two}_B(w, (0,0)) = (0,0)$
☐ richtig - ☐ falsch $\exists (x,y) \in B_{\mathsf{high}}.\mathsf{one}_B((x,y)) = b^x a^y$

b. *(7 Punkte)* (*)
Sei $K = (K_s : A_s \times A_s)_{s \in \{\, \mathsf{low}, \mathsf{high} \,\}}$ mit

$$K_{\mathsf{low}} = \{\, (x,\ y) | x \mod 3 = y \mod 3 \,\}$$
$$K_{\mathsf{high}} = \{\, (x,\ y) | \mathsf{one}_A(x) \mod 2 = \mathsf{one}_A(y) \mod 2 \,\}$$

Beweise, dass K **keine** Kongruenz auf A ist.

c. *(10 Punkte)* (**)
Sei $K = (K_s : B_s \times B_s)_{s \in \{\ \mathsf{low},\, \mathsf{high}\ \}}$ mit

$$\begin{aligned} K_{\mathsf{low}} &= \{\ (x,\ y) \mid x,\ y \in B_{\mathsf{low}} \wedge |x|_a - |x|_b = |y|_a - |y|_b\ \} \\ K_{\mathsf{high}} &= \{\ ((a,\ b),\ (x,\ y)) \mid (a,\ b),\ (x,\ y) \in B_{\mathsf{high}} \wedge a - b = x - y\ \} \end{aligned}$$

Beweise, dass K eine Kongruenz auf B ist.
Hinweis:

- $|w|_a$ liefert die Anzahl der Vorkommen des Symbols a im Wort w.
- Es genügt, die Operationsverträglichkeit nachzuweisen.

Aufgabe 3: Grammatiken ***(33 Punkte)***

a. *(9 Punkte)* (**)
Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?
Für jedes falsche Kreuz bekommst Du einen Punkt Abzug.
Bei dieser Teilaufgabe bekommst Du mindestens 0 Punkte.

Für alle Grammatiken $G = (V, \mathcal{A}, P, \mathsf{S})$ gilt:

☐ richtig - ☐ falsch Wenn $\mathrm{L}(G) = \emptyset$, dann gibt es in G eine Produktionsregel der Form $\alpha \to \lambda$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn es eine Produktionsregel der Form $\alpha \to \lambda$ gibt, dann ist $\mathrm{L}(G) = \{ \lambda \}$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn $\mathsf{S} \to \lambda \in P$, dann ist $\mathrm{L}(G) = \{ \lambda \}$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn $\mathsf{S} \to \lambda \in P$, dann ist $\lambda \in \mathrm{L}(G)$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn $\mathsf{S} \to \lambda \in P$, dann ist $\mathrm{L}(G) = \emptyset$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn es keine Produktionsregel der Form $\alpha \to \beta$ mit $\alpha \in V$ und $\beta \in \mathcal{A}^*$ gibt, dann ist $\mathrm{L}(G) = \emptyset$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn es keine Produktionsregel der Form $\alpha \to \beta$ mit $\beta \in \mathcal{A}^*$ gibt, dann ist $\mathrm{L}(G) = \emptyset$.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn G eine Sprache des Typs 3 erzeugt, dann hat diese Sprache auch den Typ 2.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn G den Typ 3 hat, dann hat sie auch den Typ 2.

b. (*)
Gegeben seien

$$\mathcal{A} = \{\, a,\ b \,\}$$
$$G_i = (\{\, \mathsf{S},\ \mathsf{T},\ \mathsf{U} \,\}, \mathcal{A}, P_i, \mathsf{S})$$

$P_1 : \mathsf{S} \to a\mathsf{S} \mid ba\mathsf{T}$
$\quad \mathsf{T} \to \lambda \mid \mathsf{U}$
$\quad \mathsf{U} \to ab\mathsf{S}a$

$P_2 : \mathsf{S} \to bS \mid a\mathsf{S} \mid ba\mathsf{T}$
$\quad \mathsf{T} \to b\mathsf{T} \mid a\mathsf{T} \mid b\mathsf{U}$
$\quad \mathsf{U} \to b$

$P_3 : \mathsf{S} \to a\mathsf{S} \mid ab\mathsf{T}$
$\quad \mathsf{T} \to aa\mathsf{U} \mid b\mathsf{T}a$
$\quad \mathsf{U} \to b$
$\quad aa \to bbb$

$P_4 : \mathsf{S} \to a \mid b \mid \lambda \mid \mathsf{T}$
$\quad \mathsf{T} \to aab\mathsf{T}a$
$\quad aa \to \mathsf{U}$
$\quad \mathsf{U} \to \lambda \mid \mathsf{S}$

i) *(8 Punkte)* (*)
Entscheide durch Eintragen von ✓ (= ja) und X (= nein), ob die entsprechende Grammatik vom jeweiligen Typ ist. Für falsche Antworten werden Dir Punkte abgezogen. Du bekommst bei dieser Aufgabe mindestens 0 Punkte.

	Typ 0	Typ 1	Typ2	Typ3
G_1				
G_2				
G_3				
G_4				

ii) *(5 Punkte)* (**)
Gib eine Ableitung des Wortes $w = bbbbbbbb$ in G_3 an.
Hinweis: w hat die Länge 8.

iii) *(4 Punkte)* (*) Gib für **jede** der Grammatiken G_1 bis G_4 je zwei verschiedene Wörter der durch sie erzeugten Sprache an.

iv) *(7 Punkte)* (**) Gib $\mathrm{L}(G_2)$ und $\mathrm{L}(G_4)$ in Mengenschreibweise an.

Aufgabe 4: Reguläre Ausdrücke ***(15 Punkte)***

a. *(4 Punkte)* (*) Gib einen regulären Ausdruck R_1 an, so dass

$$\mathrm{L}(R_1) = \{\ a^n baba^n \mid n \in [1, 3]\ \}$$

b. *(5 Punkte)* (*)
Gegeben sei

$$R_1 = a^* + (ab)^* + b^*$$

Gib eine reguläre Grammatik G an, so dass $\mathrm{L}(G) = \mathrm{L}(R_2)$

c. *(6 Punkte)* (*) Gegeben seien

$$R_3 = (a(ab+a)^* + (bba+b)^*)^*$$
$$R_4 = (b+ab+ba)ba(a)^*(aba)^*$$
$$R_5 = (((b)^*a)^*b)^*$$

Entscheide durch Eintragen von ✓ (= ja) und X (= nein), ob das entsprechende Wort in der von dem regulären Ausdruck erzeugten Sprache liegt. Für falsche Antworten werden Dir Punkte abgezogen. Du bekommst bei dieser Aufgabe mindestens 0 Punkte.

	R_3	R_4	R_5
λ			
b			
$babaaba$			
bba			

Aufgabe 5: Pumping Lemma ***(4 Punkte)***

Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?
Für jedes falsche Kreuz bekommst Du einen Punkt Abzug.
Bei dieser Aufgabe bekommst Du mindestens 0 Punkte.
Für alle Sprachen A gilt:
☐ richtig - ☐ falsch Wenn man $\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen kann, dann ist A regulär.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn man $\neg\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen kann, dann ist A nicht regulär.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn A regulär ist, dann kann man $\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen.
☐ richtig - ☐ falsch Wenn A nicht regulär ist, dann kann man $\neg\mathbf{PUMP}(A)$ zeigen.

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :