

TheGI 1: Grundlagen und Algebraische Strukturen

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 4. April 2011

Schriftliche Leistungskontrolle (ZK-N)

Studentenidentifikation:

NACHNAME	
VORNAME	
MATRIKELNUMMER	
STUDIENGANG	<input type="checkbox"/> Informatik Bachelor, <input type="checkbox"/> _____
TUTOR	<input type="checkbox"/> Christina, <input type="checkbox"/> Florian, <input type="checkbox"/> Katja, <input type="checkbox"/> Mascha, <input type="checkbox"/> Paul, <input type="checkbox"/> Sarkaft, <input type="checkbox"/> Sven, <input type="checkbox"/> Tim, <input type="checkbox"/> Tsveti, <input type="checkbox"/> Uwe

Aufgabenübersicht:

AUFGABE	SEITE	PUNKTE	THEMENBEREICH
1	2	13	Menge
2	3	17	Abbildung
3	4	28	Relation und Quotient
4	5	32	Struktur und Auswertung
5	9	10	Strukturelle Induktion

Korrektur:

AUFGABE	1	2	3	4	5	Σ
PUNKTE	13	17	28	32	10	100
ERREICHT						
KORREKTOR						
EINSICHT						

Aufgabe 1: Menge

(13 Punkte)

a. (4 Punkte) (*)

Gib explizit an: $\mathcal{P}(\{a, b\}) \uplus \{0\}$

Achtung: Für Zwischenschritte gibt es keine Punkte.

b. (4 Punkte) (*)

Fülle die Lücke mit einem möglichst einfachen Ausdruck, so dass die Aussage gilt.

$$\forall A, B. \boxed{\phantom{\text{Ausdruck}}} \Leftrightarrow (A \uplus B \subseteq B \uplus A)$$

c. (5 Punkte) (*)

Gib explizit an: $\#(\mathcal{P}([1, 11]) \setminus \{\emptyset\}) - \#[1, 6] \times [1, 6]$

Achtung: Für Zwischenschritte gibt es keine Punkte.

Aufgabe 2: Abbildung

(17 Punkte)

a. (6 Punkte) (*)

Gib explizit an: $f_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit f_1 ist injektiv, nicht surjektiv und total.

b. (6 Punkte) (*)

Beweise: f_1 ist nicht surjektiv.

Achtung: Führe den Beweis schrittweise.

c. (5 Punkte) (***)

Gib explizit an: eine Bijektion $f_2 : (\{0, 1\}^* \{1\}) \cup \{0\} \rightarrow \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \#(A) \neq \infty\}$.

Hinweis: Bei $\text{dom}(f_2)$ handelt es sich um die Binärworte, die von links nach rechts gelesen werden. Das höchstwertige Bit steht also rechts. Dabei lassen wir führende Nullen weg (falls das Binärwort nicht selbst 0 ist). Die folgende Tabelle stellt die acht kürzesten Elemente von $\text{dom}(f_2)$ dar.

w	$f_2(w)$
0	
1	
01	
11	
001	
011	
101	
111	

Achtung: Es genügt nicht die Tabelle auszufüllen.

Aufgabe 3: Relation und Quotient

(28 Punkte)

a. (6 Punkte) (**)

Sei $f_3 \triangleq \{ (0, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 3) \} : [0, 3] \rightarrow [0, 3]$.

Sei $f_4 \triangleq \{ (0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3) \} : [0, 3] \rightarrow [0, 3]$.

Gib explizit an: $Q = [0, 3] / t(s(r(\{ (x, y) \in [0, 3] \times [0, 3] \mid f_3(x) = f_4(y) \})))$.

Achtung: Für Zwischenschritte gibt es keine Punkte.

b. (6 Punkte) (*)

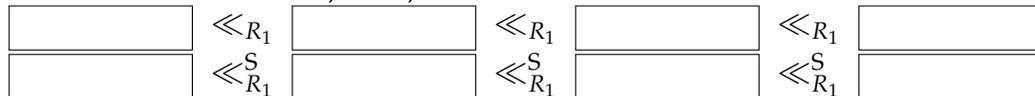
Gib explizit an: eine totale Abbildung f_5 mit

$\{ \{ z, k \}, \{ 2, 0, 1, 1 \} \} = \{ 0, 1, 2, z, k \} / \text{Ker}(f_5)$.

c. (6 Punkte) (*)

Sei $R_1 \triangleq t(r(\{ (a, c), (c, b), (b, d) \})) : \{ a, b, c, d \} \times \{ a, b, c, d \}$.

Sortiere die Worte abcd, acbd, acbdd und abcc.



d. (5 Punkte) (**)

Sei $S = \{ \mathbb{N}, \emptyset \} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{ [0, n] \} = \{ \mathbb{N}, \emptyset, \{ 0 \}, \{ 0, 1 \}, \{ 0, 1, 2 \}, \dots \}$.

Sei $Q = \mathcal{P}(\mathbb{N}) / \text{Ker}(f_6)$.

Gib explizit an: eine totale Abbildung f_6 mit S ist Repräsentantensystem von Q .

e. (5 Punkte) (**)

Begründe: Für alle $f : A \rightarrow B$ gilt $\#(A / \text{Ker}(f)) = \#(f(A))$.

Achtung: Verwende maximal 50 Worte. Hierbei zählt jede Formel als ein Wort.

Aufgabe 4: Struktur und Auswertung

(32 Punkte)

Die Signatur Σ_{Cont} , die Σ_{Cont} -Algebren *Set* und *String*, das Variablensystem X und die Variablenbelegung α sind auf Seite 8 definiert.

a. (4 Punkte) (*)

Gib an: eine Signatur Σ mit mindestens einer Sorte und eine Σ -Algebra A mit nichtleeren Trägern, so dass A keine echte Unteralgebra B hat.

b. (3 Punkte) (**)

Begründe: Für alle Signaturen $\Sigma = (S, O, ar)$ mit Σ -Algebra A gilt:

Wenn $\text{card}(\bigcup_{s \in S} A_s) > \text{card}(\mathbb{N})$, dann ist eval^A nicht surjektiv.

Achtung: Verwende maximal 50 Worte. Hierbei zählt jede Formel als ein Wort.

c. (4 Punkte) (***)

Gib an: die Anzahl der paarweise verschiedenen Untersignaturen von Σ_{Cont} .

d. (4 Punkte) (*)

Gib explizit an: die Menge von Grundtermen zur Sorte `cont`.

Hinweis: Gib $T_{\Sigma_{Cont}, data}$ nicht an.

$$T_{\Sigma_{Cont}, cont} =$$

e. (6 Punkte) (*)

Berechne: $\text{xeval}_{cont}^{\alpha, String}(\text{union}(\text{union}(c_1, \text{empty}), \text{insert}(d_1, c_2)))$

Hinweis: Gib mindestens drei bedeutsame Schritte an.

f. (5 Punkte) (*)

Gib an: $\beta : X \rightarrow \text{String}$ und $t \in T_{\Sigma_{\text{Cont}}, \text{cont}}$, so dass

$$\text{xeval}_{\text{cont}}^{\beta, \text{String}}(\text{union}(\text{insert}(d_1, \text{insert}(s(s(z))), \text{union}(c_2, t))), \text{insert}(s(z), \text{empty}))) = 12211.$$

g. (6 Punkte) (*)

Vervollständige die rechten Seiten durch möglichst einfache Terme, die ungleich zu den Termen der linken Seite sind, so dass die Algebra *Set* die Gleichungen erfüllt.

Achtung: Bei dieser Teilaufgabe geht es um Set; nicht um String.

$$s(s(s(s(s(s(s(s(s(d_1)))))))))) =$$

$$\text{insert}(d_1, \text{insert}(d_1, c_1)) =$$

$$\text{insert}(d_1, \text{insert}(d_2, c_1)) =$$

$$\text{union}(c_1, \text{empty}) =$$

$$\text{union}(c_1, \text{insert}(d_1, c_2)) =$$

$$\text{insert}(\text{input style="width: 50%; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"}, \text{input style="width: 50%; height: 30px; border: 1px solid black;" type="text"})$$

Σ_{Cont}	Set	$String$
data	$Set_{data} \triangleq [0, 9]$	$String_{data} \triangleq [0, 9]$
cont	$Set_{cont} \triangleq \mathcal{P}([0, 9])$	$String_{cont} \triangleq [0, 9]^*$
$z : (data)$	$z_{Set} : Set_{data}$ $z_{Set} \triangleq 0$	$z_{String} : String_{data}$ $z_{String} \triangleq 0$
$empty : (cont)$	$empty_{Set} : Set_{cont}$ $empty_{Set} \triangleq \emptyset$	$empty_{String} : String_{cont}$ $empty_{String} \triangleq \lambda$
$s : (data, data)$	$s_{Set} : Set_{data} \rightarrow Set_{data}$ $x \mapsto (x + 1) \bmod 10$	$s_{String} : String_{data} \rightarrow String_{data}$ $x \mapsto (x + 1) \bmod 10$
$insert : (data, cont, cont)$	$insert_{Set} : Set_{data} \times Set_{cont} \rightarrow Set_{cont}$ $(x, s) \mapsto \{x\} \cup s$	$insert_{String} : String_{data} \times String_{cont} \rightarrow String_{cont}$ $(x, v) \mapsto v \cdot x$
$union : (cont, cont, cont)$	$union_{Set} : Set_{cont} \times Set_{cont} \rightarrow Set_{cont}$ $(s, t) \mapsto s \cup t$	$union_{String} : String_{cont} \times String_{cont} \rightarrow String_{cont}$ $(v, w) \mapsto v \cdot w$

$$X \triangleq (X_s)_{s \in \{data, cont\}}$$

$$X_{data} \triangleq \{d_1, d_2, d_3\}$$

$$X_{cont} \triangleq \{c_1, c_2\}$$

$$\alpha : X \rightarrow String$$

$$\alpha \triangleq (\alpha_s : X_s \rightarrow String_s)_{s \in \{data, cont\}}$$

$$\alpha_{data} \triangleq \{(d_1, 6), (d_2, 4), (d_3, 1)\}$$

$$\alpha_{cont} \triangleq \{(c_1, 7658), (c_2, 12)\}$$

Aufgabe 5: Strukturelle Induktion

(10 Punkte)

a. (3 Punkte) (*)

Gib explizit an: eine Signatur $\Sigma = (S, O, ar)$ und Σ -Algebra A mit:

- (i) $\text{sort} \in S$ und
- (ii) $\text{eval}_{\text{sort}}^A(\mathbb{T}_{\Sigma, \text{sort}}) \supset \mathbb{Z}$

b. (7 Punkte) (**)

Gib explizit an: eine Signatur $\Sigma = (S, O, ar)$ und Σ -Algebra A mit:

- (i) $\text{sort} \in S$,
- (ii) für alle Prädikate P gilt:
Wenn $(\forall s \in S . \forall t \in \mathbb{T}_{\Sigma, s} . s = \text{sort} \Rightarrow P(\text{eval}_s^A(t)))$ dann $(\forall x \in \mathbb{Z} . P(x))$ und
- (iii) nicht für alle Prädikate P gilt:
Wenn $(\forall x \in \mathbb{Z} . P(x))$ dann $(\forall s \in S . \forall t \in \mathbb{T}_{\Sigma, s} . s = \text{sort} \Rightarrow P(\text{eval}_s^A(t)))$.

Achtung: Jedes der Prädikate P ist wenigstens auf den ganzen Zahlen wohldefiniert.

Matrikelnummer: _____ Name: _____

Auf dieser Seite löse ich einen Teil der Aufgabe __ :
Teilaufgabe __ :