TheGI 2 im SS 2002: Klausur am 18. Juli 2002

Bei der Klausur sind 75 Punkte erreichbar. Wer 37 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgaben (10 Punkte) können nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.

Verschafft Euch zuerst einen Überblick über alle Aufgaben und fangt dann mit der Bearbeitung derjenigen Aufgaben an, die Euch am wenigsten aufwendig erscheinen.

Die häufig geforderten Begründungen meinen keine Beweise, sondern lassen sich kurz in einem Satz abhandeln.

Beginnt bitte jede Aufgabe auf einer neuen Seite. (Wir haben Blätter vorrätig, falls Euer Vorrat verbraucht ist.) Schreibt bitte auf jedes von Euch abgegebene Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer!

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Punkteverteilung:

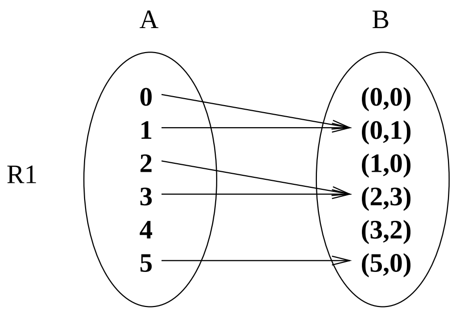
Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Z	Σ
Punkte	4	7	8	7	20	9	16	4	10	75 (+10)

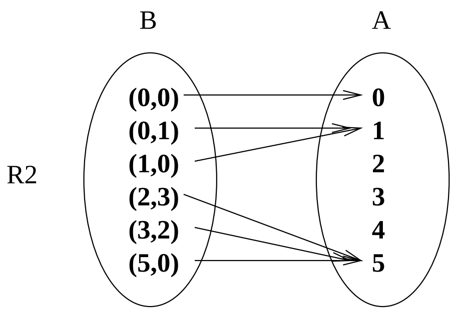
Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Z	Σ	Note
Punkte											

Aufgabe 1, Relationen und Äquivalenzrelationen (4 Punkte)

Seien $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 3), (3, 2), (5, 0)\}$ zwei Mengen und seien die Relationen R_1 vom Typ $A \times B$ und R_2 vom Typ $B \times A$ durch die folgenden Graphen gegeben:





1. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ linkstotal? Begründung.

2. **(1 Punkt)** Ist $R_2 \circ R_1$ rechtseindeutig? Begründung.

3. **(1 Punkt)** Berechnet die Relation $R_3 = R_2^{-1} \circ R_2$ und gebt den Graphen der Relation visualisiert im folgenden Diagramm (oder vollständig in Mengenschreibweise) an:

   R_3: **(0,0)** **(0,1)** **(2,3)** **(3,2)**

   (1,0) **(5,0)**

4. **(1 Punkt)** Ist R_3 eine Äquivalenzrelation? Begründung.

Aufgabe 2, Ordnungen (7 Punkte)

Betrachtet die folgende als Diagramme dargestellten Relation R vom Typ $M \times M$ mit $M = \{\bigcirc, \triangle, \triangledown, \square\}$:

$$R:\quad \begin{tikzcd} \bigcirc \arrow[loop above] \arrow[rr, bend left=10] & & \triangle & \triangledown \arrow[rr, bend left=10] & & \square \end{tikzcd}$$

Nachfolgend die Aufgaben:

1. **(3 Punkte)** Welche Eigenschaften (reflexiv, antisymmetrisch und transitiv) treffen auf die Relation R zu und welche nicht? Begründung!
2. **(2 Punkte)** Erweitert die Relation R durch Hinzufügen weiterer Paare im oben stehenden Diagramm zu einer totalen Ordnung R_t.
3. **(2 Punkte)** Ordnet die vier Wörter $\triangle \triangledown \square$, $\triangle\triangledown$, $\triangle\square$ und $\bigcirc\square\square$ aus M^*
   (a) nach der Lexikographischen Ordnung über R_t und
   (b) nach der Standardordnung über R_t.

Aufgabe 3, Terme und Termalgebra (8 Punkte)

Gegeben sei die folgende Signatur der 2x2-Matrizen über den natürlichen Zahlen:

$\Sigma =$	**sorts**	nat, matrix	
	opns	z:	$\to$ nat
		e:	$\to$ nat
		succ:	nat $\to$ nat
		plus:	nat nat $\to$ nat
		zero:	$\to$ matrix
		unit:	$\to$ matrix
		matrix:	nat nat nat nat $\to$ matrix
		add:	matrix matrix $\to$ matrix

1. **(2 Punkte)** Gebt zu den Sortensymbolen *nat* und *matrix* je einen Grundterm an, der mindestens 3 Operationssymbole enthält.

2. **(6 Punkte)** Gesucht werden die folgenden Teile der Grundtermalgebra T_Σ (Dabei kann die Trägermenge $T_{\Sigma,nat}$ als gegeben vorausgesetzt werden):

   (a) (2 Punkte) Gebt die Trägermenge $T_{\Sigma,matrix}$ an.

   (b) (4 Punkte) Definiert die Abbildungen $unit_{T_\Sigma}$ und add_{T_Σ} (Denkt an die Funktionalitäten).

Desweiteren seien zwei Σ-Algebren A und B wie folgt definiert:

Σ	A	B
nat $matrix$	$A_{nat} = \mathbb{N}$ $A_{matrix} =$ $\{\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix} \|n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}\}$	$B_{nat} = \mathbb{N}$ $B_{matrix} = \mathbb{N}$
$z :\to nat$ $e :\to nat$ $succ : nat \to nat$ $plus : nat\ nat \to nat$ $zero :\to matrix$ $unit :\to matrix$ $matrix :$ $nat\ nat\ nat\ nat \to matrix$ $add :$ $matrix\ matrix \to matrix$	$z_A = 0$ $e_A = 1$ $succ_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$ $plus_A : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \mapsto n + m$ $zero_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $unit_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $matrix_A :$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_{matrix}$ $(n_1, n_2, n_3, n_4) \mapsto \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}$ $add_A : A_{matrix} \times A_{matrix} \to A_{matrix}$ $(\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}) \mapsto$ $\begin{pmatrix} n_1 + m_1 & n_2 + m_2 \\ n_3 + m_3 & n_4 + m_4 \end{pmatrix}$	$z_B = 0$ $e_B = 1$ $succ_B : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n+1$ $plus_B : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n, m) \mapsto n + m$ $zero_B = 0$ $unit_B = 2$ $matrix_B :$ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n_1, n_2, n_3, n_4) \mapsto$ $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ $add_B : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $(n_1, n_2) \mapsto n_1 + n_2$

Aufgabe 4, Abbildungen und Repräsentantensystem (7 Punkte)

1. **(4 Punkte)** Welche der Eigenschaften injektiv und surjektiv treffen auf die folgende Abbildung zu? Beweist eure Aussagen!

$$h_m : A_{matrix} \to \mathbb{N}$$

$$\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix} \mapsto n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

2. **(1 Punkt)** Gebt den Kern der Abbildung $h_m : A_{matrix} \to \mathbb{N}$ an.

3. **(2 Punkte)** Gebt ein Repräsentantensystem S_{matrix} bzgl. des Quotienten $A_{matrix}/_{Ker(h_m)}$ an.

Aufgabe 5, Homomorphismen und Algebra (20 Punkte)

1. **(8 Punkte)** Gesucht wird ein Σ-Homomorphismus $h : A \to B$.
   (a) (2 Punkte) Stellt die Homomorphiebedingungen für die Operationssymbole *unit* und *add* auf.
   (b) (2 Punkte) Gebt einen Homomorphismus $h : A \to B$ an.
   (c) (4 Punkte) Beweist, daß h die Homomorphiebedingung für das Operationssymbol *add* erfüllt.
2. **(8 Punkte)** Beweist, daß es keinen Σ-Homomorphismus $g : B \to A$ gibt.
3. **(4 Punkte)**

   Sei $\Sigma' = (\{nat, matrix\}, \{unit :\to matrix, add : matrix\, matrix \to matrix\}$ eine Untersignatur von Σ. Gebt eine Σ'-Algebra C an, die nicht ein Σ'-Redukt der Σ-Algebra A bzw. B ist.

Aufgabe 6, Termauswertung und Gleichungen (9 Punkte)

Gegeben sei das Variablensystem $X = (X_{nat}, X_{matrix})$ mit $X_{nat} = \{x_1, x_2\}$ und $X_{matrix} = \{m\}$.

1. **(3 Punkte)** Sei weiterhin eine Variablenbelegung $ass : X \to A$ gegeben mit

$$\begin{aligned}&ass_{nat} : X_{nat} \to A_{nat}\\ &x_1 \mapsto 1\\ &x_2 \mapsto 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&ass_{matrix} : X_{matrix} \to A_{matrix}\\ &m \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

   Wertet den Term

$$add(unit, matrix(plus(e, z), x_1, x_2, z))$$

   schrittweise gemäß der Definition von $xeval(ass)$ in der Σ-Algebra A aus.

   Hinweis: Ihr könnt in dieser und den weiteren Aufgaben die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwenden:

$$\begin{aligned}eva_n &=_{def} xeval(ass)_{nat}\\ eva_m &=_{def} xeval(ass)_{matrix}\end{aligned}$$

2. **(6 Punkte)** Beweist oder widerlegt die Gültigkeit der folgenden Gleichungen in der Σ-Algebra A (Hier braucht ihr die Terme nicht schrittweise auswerten, aber jeder Beweisschritt muß begründet werden):

   (e) $add(unit, matrix(x_1, x_2, e, z)) = matrix(plus(e, x_1), x_2, e, succ(z))$

   (e') $add(matrix(e, x_1, x_2, e), zero) = unit$

Aufgabe 7, Spezifikation und Quotiententermalgebra (16 Punkte)

Gegeben sei das Variablensystem $X' = (X'_{nat}, X'_{matrix})$ mit $X'_{nat} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ und $X'_{matrix} = \emptyset$.

1. **(6 Punkte)** Ergänzt die rechten Seiten der folgenden Σ-Gleichungen, so daß $T_\Sigma/_{\sim^E}$ mit $E = \{e1, e2, ..., e6\}$ isomorph zu A ist. (Ohne Beweis!):

   (e1) $e =$

   (e2) $plus(x_1, z) =$

   (e3) $plus(x_1, succ(x_2)) =$

   (e4) $zero =$

   (e5) $unit =$

   (e6) $add(matrix(x_1, x_2, x_3, x_4), matrix(y_1, y_2, y_3, y_4)) =$

2. **(4 Punkte)**

   Gebt 4 Elemente der Äquivalenzklasse $[matrix(succ(e), z, z, z)]_{\sim^E_{matrix}}$ an.

3. **(6 Punkte)** Gesucht werden folgende Teile der Quotiententermalgebra $Q = T_\Sigma/_{\sim^E}$:

   (a) (2 Punkte) Gebt die Trägermenge Q_{matrix} an.

   (b) (4 Punkte) Definert die Abbildungen $unit_Q$ und add_Q (Denkt an die Funktionalitäten!).

Aufgabe 8, Spezifikation (4 Punkte)

Gegeben sei folgende Signatur SET der Mengen und die SET-Algebra D:

Σ	D
nat set	$A_{nat} = \mathbb{N}$ $A_{set} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$
$z :\to nat$	$z_D = 0$
$succ : nat \to nat$	$succ_D : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $n \mapsto n + 1$
$empty :\to set$	$empty_D = \emptyset$
$insert : nat\ set \to set$	$insert_D : \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $(n, M) \mapsto \{n\} \cup M$
$union : set\ set \to set$	$union_D : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $(M, N) \mapsto M \cup N$

Gebt eine Menge $E' = \{e1', e2', e3', e4'\}$ von Gleichungen an, so daß $T_\Sigma/_{\sim^E} \cong D$ (ohne Beweis!).

Zusatzaufgaben, Erzeugte Kongruenzen und Repräsentantensysteme (10 Punkte)

Die Zusatzaufgaben beziehen sich auf die Spezifikation $SPEC = (\Sigma, E)$ der 2x2-Matrizen über den natürlichen Zahlen, d.h. die Signatur Σ aus der Aufgabe 3 und die Gleichungen E aus der Aufgabe 7.1.

1. **(4 Punkte)** Gebt zwei verschiedene Familien von Repräsentantensystemen R_1 und R_2 zu den Trägermengen $T_\Sigma/_{\sim^E}$ an.

2. **(6 Punkte)** Beweist, daß die Spezifikation $SPEC$ initial korrekt bzgl. der Σ-Algebra A ist, d.h.

$$T_\Sigma/_{\sim^E} \cong A$$

Dabei seien die Gleichungen E korrekt bzgl. der Σ-Algebra A, d.h. $A \models E$. Weiterhin sei R eine Familie von Repräsentantensystemen aus der Aufgabe Z.1, d.h. $R = R_1$ bzw. $R = R_2$. Ihr müßt beweisen, daß

(a) A operationserzeugt ist, d.h. $eval(A)$ ist surjektiv,

(b) der auf R eingeschränkte Auswertungshomomorphismus $eval(A)|_R : R \to A$ injektiv ist und

(c) die Gleichungsmenge E vollständig bzgl. R ist, d.h.

$$\forall t \in T_\Sigma \exists r \in R : t \sim^E r$$