TheGI 2 im SS 1999: Klausur am 15. Juli 1999 Musterlösung

Die folgende Musterlösung ist gedacht, als Empfehlung für die Schreibweisen der Lösunge einer TheGI II - Klausur. Sie ist nicht gedacht für die Kontrolle von Ergebnissen im Rahmen von Proberechnungen zur Klausurvorbereitung. In diesem Sinne wird auch keine Garantie für die Korrektheit der Lösungen übernommen. Damit eingeschlichene Fehler aber nicht zu unnötiger Verwirrung führen, wird um entsprechende Hinweise gebeten (e-mail: schroetg@cs.tu-berlin.de).

Bei der Klausur waren 56 Punkte erreichbar, 28 in jedem der beiden Teile. Wer 28 Punkte erreichte, hatte die Klausur bestanden. Mit der Bearbeitung der Zusatzaufgabe (8 Punkte) konnten nicht erreichte Punkte bei den regulären Klausuraufgaben ausgeglichen werden.

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Z	Σ
Punkte	6	4	10	8	13	15	8	56 (+8)

Teil 1: Mengen, Relationen, Abbildungen, Ordnungen, Äquivalenzrelationen

Aufgabe 1, Mengen (6 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Sei $A_1 = \{\emptyset, \{1\}\}$, $A_2 = \{a\}$, $A_3 = \{a, b, 1\}$.
   Gebt folgende Mengen elementweise an:
   (a) $A_1 \times A_2 = \{(\emptyset, a), (\{1\}, a)\}$
   (b) $\mathcal{P}(A_1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}$
   (c) $\bigcup_{i \in \{1,2,3\}} A_i = \{\emptyset, \{1\}, a, b, 1\}$

2. **(3 Punkte)** Beweist oder widerlegt die folgenden Aussagen:
   (a) $(A \times B) \cap (C \times D)$
   $\overset{\text{Def. }\cap}{=} \{(x, y) | (x, y) \in A \times B \text{ und } (x, y) \in C \times D\}$
   $\overset{\text{Def. }\times}{=} \{(x, y) | (x \in A \text{ und } y \in B) \text{ und } (x \in C \text{ und } y \in D\}$
   $\overset{\text{Kom. u Asso. von und}}{=} \{(x, y) | (x \in A \text{ und } x \in C) \text{ und } (y \in B \text{ und } y \in D\}$
   $\overset{\text{Def. }\cap}{=} \{(x, y) | x \in A \cap C \text{ und } y \in B \cap D\}$
   $\overset{\text{Def. }\times}{=} (A \cap C) \times (B \cap D)$
   (b) Sei $A = D = \emptyset$ und $B = C = \{*\}$.
   Dann folgt:
   $(A \times B) \cup (C \times D)$
   $\overset{\text{Def. }\times}{=} \emptyset \cup emptyset$
   $\overset{\text{Def. }\cup}{=} \emptyset$
   bzw.:
   $(A \cup C) \times (B \cup D)$
   $\overset{\text{Def. }\cup}{=} \{*\} \times \{*\}$
   $\overset{\text{Def. }\times}{=} \{(*, *)\}$
   D.h.,
   $(A \times B) \cup (C \times D) \neq (A \cup C) \times (B \cup D)$

Aufgabe 2, Relationen (4 Punkte)

Typen:
$R_i \subseteq A \times A \forall i \in \{1,2,3,4\}$.

Graphen:

1. **(1 Punkt)** $R_1 = \{(e,f),(f,f)\}$

2. **(1 Punkt)** $R_2 = \{(e,e),(f,f),(g,g)\}$

3. **(1 Punkt)** $R_3 = \{(f,f),(h,h)\}$

4. **(1 Punkt)** $R_4 = \{f,e),(f,f)\}(= R_1^{-1})$

Aufgabe 3, Abbildungen (10 Punkte)

1. **(2 Punkte)** R_3 ist keine partiele Abbildung.
   Beweis: $(1,b) \in R_3$ und $(1,c) \in R_3$ und $b \neq c$, d.h. R_3 ist nicht rechtseindeutig und damit keine partielle Abbildung.

2. **(1 Punkt)** R_1 ist eine totale Abbildung.
   Begründung (hier nicht gefordert!): R_1 ist linkstotal und rechtseindeutig.

3) **(4 Punkte)** f ist nicht injektiv.
Beweis: $f(1) = c = f(3)$ und $1 \neq 3$
f ist nicht surjectiv.
Beweis: Für alle $x \in A$ gilt $f(x) \neq b$.
f ist nicht bijektiv.
Beweis: f ist nicht surjectiv.

4) **(1 Punkt)** $Ker(f) \subseteq A \times A$ mit
$Ker(f) =$
$\{(2,2),(4,4),(2,4),(4,2),(1,1),(3,3),(5,5),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(3,5),(5,3)\}$

5) **(1 Punkt)** $[1] = [3] = [5] = \{1,3,5\}$
$[2] = [4] = \{2,4\}$

6) **(1 Punkt)** $A|_{Ker(f)} = \{[1],[2],[3],[4],[5]\}$ $(= \{[1],[2]\}$
$R = \{1,2\}$

Aufgabe 4, Ordnungen und Äquivalenzrelationen (8 Punkte)

1. **(1 Punkt)**
   R_3
   Begründung (hier nicht gefordert): R_3 ist reflexiv, antisymetrisch und transitiv.
2. **(2 Punkt)**
   R_1
   Beweis: indirekt
   Annahme: Sei $R \subseteq A \times A$ eine Ordnung mitr $R_1 \subseteq R$.
   Dann gilt: Aus $(1,3) \in R_1$,$(3,4) \in R_1$ und $(4,1) \in R_1$ folgt $(1,3) \in R$,$(3,4) \in R$ und $(4,1) \in R$. Daraus folgt $(1,4) \in R$ und $(4,1) \in R$, da R Ordnung und damit transitiv ist. Da $(1,4) \in R$ und $(4,1) \in R$ und $4 \neq 1$ ist R nicht antisymetrich und damit keine Ordnung. Wiederspruch zur Anname.
3. **(3 Punkte)**
   Die Relation ist R_2.
   - **(a)** $O_p = R_2 \cup \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
   - **(b)** Z.B., $O_t = O_p \cup \{(2,4),(1,3),(1,4),(3,4)\}$
   - **(c)** λ, 23, 12 und 134
4. **(2 Punkte)**
   - **(a)** Alle! ;)
   - **(b)** Z.B., $R_3 \cup \{(3,2)\}$

Teil 2: Signatur, Spezifikation, Algebren, Terme, Homomorphismen

Aufgabe 5, Algebren, Homomorphismen (13 Punkte)

1. **(1 Punkt)**
   Sei die Σ-Algebra C wie folgt definiert:

C
$C_n = \mathbb{N}$ $C_j = \emptyset$
$z_C = z_A = 0$ $s_C : C_n \to C_n;$ $\quad s_C(x) = s_A(x) = x + 1$ $m_C : C_n \times C_n \to C_n;$ $\quad m_C = m_A(x,y) = x \cdot y$

   Dann ist $C \subseteq A$ eine echte Unteralgebra von A.
2. **(6 Punkte)**
   $h : A \to B$ mit
   $h_n : A_n \to B_n$ mit $h_n(2x) = F$ und $h_n(2x+1) = T$ und
   $h_j : A_j \to B_j$ mit $h_j(x) = w$.
   Homomorphiebedingungen:
   $h_n(z_A) = z_B$
   $\forall x \in A_n : h_n(s_A(x)) = s_B(h_n(x))$
   $\forall x, y \in A_n : h_n(m_A(x,y)) = m_B(h_n(x), h_n(y))$
   Beweis fuer z: $h_n(z_A) \overset{\text{Def. } z_A}{=} h_n(0) \overset{\text{Def. } h_n}{=} F \overset{\text{Def. } z_B}{=} z_B$
   Beweis fuer s: durch vollständige Fallunterscheidung.
   1. Fall: $x \in A_n$ mit x ist gerade.
   $h_n(s_A(x)) \overset{\text{Def. } s_A}{=} h_n(x+1) \overset{\text{Def. } h_n}{=} T \overset{\text{Def. } s_B}{=} s_B(F) \overset{\text{Def. } h_n}{=} s_B(h_n(x))$
   2. Fall: $x \in A_n$ mit x ist ungerade.
   $h_n(s_A(x)) \overset{\text{Def. } s_A}{=} h_n(x+1) \overset{\text{Def. } h_n}{=} F \overset{\text{Def. } s_B}{=} s_B(T) \overset{\text{Def. } h_n}{=} s_B(h_n(x))$

3. **(4 Punkte)**
Beweis: indirekt.
Annahme: $g : B \to A$ ist Σ-Homomorphismus.
Dann gilt:
$0 \overset{\text{Def. } z_A}{=} z_A \overset{\text{Hom.-Bed.}}{=} g_n(z_B) \overset{\text{Def. } z_B}{=} g_n(F)$
$g_n(F) \overset{\text{Def. } s_A}{=} g_n(s_B(s_B(F))) \overset{\text{Def. } z_B}{=} g_n(s_B(s_B(z_B))) \overset{\text{Hom.-Bed.}}{=} s_A(s_A(z_A))$
$\overset{\text{Def. } z_A}{=} s_A(s_A(0)) \overset{\text{Def. } s_A}{=} 2$
Diese ist ein wiederspruch zur Rechtseindeutigkeit von g_n.
4. **(1 Punkt)** C_n mindestens eins und C_j keins.
5. **(1 Punkt)** Ja.

Aufgabe 6, Termalgebra, Gleichungen (15 Punkte)

1. **(1 Punkt)**
$ksucc(ksucc(ksucc(k))) \in T_{\Sigma,d}$
$ladd(ksucc(k)), empty) \in T_{\Sigma,l}$

2. **(3 Punkte)**

T_Σ
$T_{\Sigma,d} = \{k, ksucc(t_d) \vert t_d \in T_{\Sigma,d}\}$ $T_{\Sigma,l} = \{empty, radd(t_l, t_d), ladd(t_d, t_l) \vert t_d \in T_{\Sigma,d}, t_l \in T_{\Sigma,l}\}$
$k_{T_\Sigma} = k \in T_{\Sigma,d}$ $empty_{T_\Sigma} = empty \in T_{\Sigma,l}$ $ksucc_{T_\Sigma} : T_{\Sigma,d} \to T_{\Sigma,d};$ $t_d \mapsto ksucc(t_d)$ $radd_{T_\Sigma} : T_{\Sigma,l} \times T_{\Sigma,d} \to T_{\Sigma,d};$ $(t_l, t_d) \mapsto radd(t_l, t_d)$ $ladd_{T_\Sigma} : T_{\Sigma,d} \times T_{\Sigma,l} \to T_{\Sigma,d};$ $(t_d, t_l) \mapsto ladd(t_d, t_l)$

3. **(6 Punkte)**

(a) **(2 Punkte** Variablenbelegung:

$ass : X \to A$ mit
$ass_d : X_d \to A_d$
$ass_d(x) =_{def} 0$
$ass_d(y) =_{def} 1$
und
$ass_l : X_l \to A_l$
$ass_l(w) =_{def} 32$
Termauswertung:
$eva_l(radd(ladd(x, w), y))$
$= radd_A(eva_l(ladd(x, w)), eva_d(y))$
$= radd_A(ladd_A(eva_d(x), eva_l(w)), ass_d(y))$
$= radd_A(ladd_A(ass_d(x), ass_l(w)), 1)$
$= radd_A(ladd_A(0, 32), 1)$
$= radd_A(032, 1)$
$= 0321$

(b) **(4 Punkte)**

(e1) $eva_l(radd(ladd(x, w), y))$
$\overset{\text{Def. } eval}{=} radd_A(ladd_A(ass_d(x), ass_l(w)), ass_d(y))$
$\overset{\text{Def. } A}{=} ass_d(x)ass_l(w)ass_d(y)$
$\overset{\text{Def. } A}{=} ladd_A(ass_d(x), radd_A(ass_l(w), ass_d(y)))$
$\overset{\text{Def. } eval}{=} eva_l(ladd(x, radd(w, y)))$
D.h., $A \models (e1)$

(e2) Sei ass gewählt wie in Aufgabenteil (a). Dann gilt
$eva_l(radd(ladd(x, w), y)) = 0321$,
$eva_l(radd(radd(w, x), y)) = 3201$ und
$0321 \neq 3201$
D.h., $A \not\models (e2)$

4. **(1 Punkt)** Weil $eval(A)$ ein Homomorphismus ist.

5. **(3 Punkte)**

B
$B_d = \{[t_d] \mid t_d \in T_{\Sigma,d}\}$ $B_l = \{[t_l] \mid t_l \in T_{\Sigma,l}\}$
$k_B = [k] \in B_d$ $empty_B = [empty] \in B_l$ $ksucc_B : B_d \to B_d;$ $[t_d] \mapsto [ksucc(t_d)]$ $radd_B : B_l \times B_d \to B_d;$ $([t_l], [t_d]) \mapsto [radd(t_l, t_d)]$ $ladd_B : B_d \times B_l \to B_d;$ $([t_d], [t_l]) \mapsto [ladd(t_d, t_l)]$

6. **(1 Punkt)**
$[ladd(ksucc(k), radd(empty, k))]_{ker((eval(A))} =$
$\{ladd(ksucc(t), radd(empty, t)),\ \ ladd(ksucc(t), ladd(empty, t)),$
$radd(ladd(ksucc(t), empty), t),\ \ radd(radd(ksucc(t), empty), t) \mid$
$t = ksucc^{4n}(k), n \in \mathbb{N}\}$

Zusatzaufgabe, Spezifikation (8 Punkte)

1. **(3 Punkte)** Wir legen das Variablensystem aus Aufgabe 6.3) zugrunde. $E = \{e1, e2, e3\}$
   (e1): $ksucc(ksucc(ksucc(ksucc(x)))) = x$
   (e2): $radd(empty, x) = ladd(x, empty)$
   (e3): $radd(ladd(y, w), x) = ladd(y, radd(w, x))$

2. **(3 Punkte)**
   $T_\Sigma|_{ker(eval(A))}$ und A sind genau dann isomorph, wenn A operationserzeugt, d.h., $eval(A)$ surjektiv ist.
   Beh.: $eval(A) : T_\Sigma \to A$ ist surjektiv.
   Bew.: $eval(A) : T_\Sigma \to A$ ist surjektiv, gilt genau dann wenn,
   $eval(A)_d : T_{\Sigma,d} \to A_d$ ist surjektiv und
   $eval(A)_l : T_{\Sigma,l} \to A_l$ ist surjektiv.
   Gemäß Definition der Surjektivität ist dieses äquivalent zu
   (1) $\forall a_d \in A_d \exists t_d \in T_{\Sigma,d} : eval(A)_d(t_d) = a_d$ und
   (2) $\forall a_l \in A_l \exists t_l \in T_{\Sigma,l} : eval(A)_l(t_l) = a_l$.

   Zu (1): Da $A_d = \{0, 1, 2, 3\}$ endlich ist, beweisen wir durch vollstaendige Fallunterscheidung:
   1. Fall: Sei $a_d = 0$.
   Sei dann $t_d = k$. Dann gilt:
   $eval(A)_d(t_d) = eval(A)_d(k) = k_A = 0 = a_d$.
   2. Fall: Sei $a_d = 1$.
   Sei dann $t_d = ksucc(k)$. Dann gilt:
   $eval(A)_d(t_d) = eval(A)_d(ksucc(k)) = ksucc_A(k_A) = 1 = a_d$.
   3. Fall: Sei $a_d = 2$.
   Sei dann $t_d = ksucc(ksucc(k))$. Dann gilt:
   $eval(A)_d(t_d) = eval(A)_d(ksucc(ksucc(k))) = ksucc_A(ksucc_A(k_A)) = 2 = a_d$.
   4. Fall: Sei $a_d = 3$.
   Sei dann $t_d = ksucc(ksucc(ksucc(k)))$. Dann gilt:
   $eval(A)_d(t_d) = eval(A)_d(ksucc(ksucc(ksucc(k)))) = ksucc_A ksucc_A(ksucc_A(k_A)) = 3 = a_d$.

   Zu (2): Sei *lenght* die im Aufgabenteil 3) definierte Funktion, dann ist die Behauptung äquivalent zu
   $\forall n \in \mathbb{N} \forall a_l \in A_l : length(a_l) = n \Rightarrow \exists t_l \in T_{\Sigma,l} : eval(A)_l(t_l) = a_l$.
   Dies ist eine Aussage über alle natürlichen Zahlen, welche wir mit vollständiger Induktion beweisen.
   Ind.-Anf.: Sei $n = 0$. Dann folgt aus $length(a_l) = n$ das $a_l = \lambda$. Sei $t_l = empty$. Dann gilt:
   $eval(A)_l(t_l) = eval(A)_l(empty) = empty_A = \lambda = a_l$.
   Ind.-Schritt:
   Ind.-Vor.: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt:
   $\forall a_l \in A_l : length(a_l) = n \Rightarrow \exists t_l \in T_{\Sigma,l} : eval(A)_l(t_l) = a_l$.
   Ind.-Beh.: Für $n + 1$ gilt:
   $\forall a_l \in A_l : length(a_l) = n + 1 \Rightarrow \exists t_l \in T_{\Sigma,l} : eval(A)_l(t_l) = a_l$.
   Ind.-Bew.: Aus $length(a_l) = n + 1$ folgt es existieren $b \in A_d$ und $w \in A_l$, sodaß $a = wb$ und $length(w) = n$. Seien in folgenden $b \in A_d$ und $w \in A_l$ so gewaehlt, daß $a = wb$ und $length(w) = n$.
   Dann existiert gemäß Induktionsvoraussetzung ein $t'_l \in T_{\Sigma,l}$ mit $eval(A)_l(t'_l) = w$.
   Gemäß (1) existiert weiterhin ein $t_d \in T_{\Sigma,d}$ mit $eval(A)_d(t_d) = b$.
   Seien $t'_l \in T_{\Sigma,l}$ und $t_d \in T_{\Sigma,d}$ so gewählt, daß $eval(A)_l(t'_l) = w$ und $eval(A)_d(t_d) = b$.
   Dann definieren wir $t_l =_{def} radd(t'_l, t_d)$. Dann gilt:
   $eval(A)_l(t_l) = eval(A)_l(radd(t'_l, t_d))$
   $= radd_A(eval(A)_l(t'_l), eval(A)_d(t_d))$
   $= radd_A(w, b) = wb = a_l$.
   Aus Ind.-Anf. und Ind.-Schritt folgt nach dem Prinzip der voll. Induktion unsere Behauptung. (Nun gut die formale Ausführlichkeit dieses Beweises ist 'etwas' auf die Spitze getrieben. ;)

3. **(2 Punkte)** $E' = E \cup \{e4, e5\}$ mit
   (e4): $length(empty) = zero$
   (e5): $length(radd(w, x)) = succ(length(w))$