TheGI 2: Berechenbarkeit und Komplexität

Prof. Dr.-Ing. Uwe Nestmann - 2. Juni 2009

1. Schriftliche Leistungskontrolle (ZK)

Punktzahl In dieser schriftlichen Leistungskontrolle sind 100 Punkte erreichbar. Wer 40 Punkte erreicht, hat die schriftliche Leistungskontrolle bestanden (Note 4.0 oder besser).

Bearbeitungsdauer Die Bearbeitungsdauer beträgt 75 Minuten. Ihr erhaltet zudem 15 weitere Minuten für das Lesen der Aufgabenstellung und das Beschriften der ausgeteilten Zettel mit Eurem Namen und Eurer Matrikelnummer.

Hilfsmittel Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist die in der Vorlesung verwendete und auf der Vorlesungsseite bereit gestellte „Formelsammlung". Diese darf keine Notizen enthalten (und sie darf auch während der Klausur nicht als Papier oder Schmierpapier verwendet werden). Eigenes Papier darf *nicht* verwendet werden.

Aufgabenreihenfolge Die gegebene Reihenfolge der Aufgaben orientiert sich an der Themenreihenfolge in der Vorlesung. Es wird daher empfohlen, die Bearbeitungsreihenfolge der Aufgaben selbst durch Abschätzung des Aufwands für die einzelnen Aufgaben festzulegen.

- Antworten zu den Aufgaben sind auf demselben Blatt zu geben, auf dem die jeweilige Aufgabenstellung steht. Dabei können beide Seiten der Blätter verwendet werden. Sofern weitere Blätter benötigt werden, werden diese durch uns bereitgestellt. **Lösungen zu verschiedenen Aufgaben sind stets auf unterschiedlichen Blättern abzugeben!**
- Auf jedem abgegebenen Blatt ist die **bearbeitete Aufgabe, Name und Matrikelnummer** anzugeben.
- Antworten oder Teile von Antworten, die mit Rotstift oder Bleistift geschrieben oder nicht eindeutig lesbar sind, werden nicht bewertet. Es sind nur dokumentenechte Stifte zugelassen.

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	Studiengang:
(Tutorin/Tutor:)	

Punkteverteilung (**NICHT ausfüllen!**):

Aufgabe	1	2	3	4	5		Σ	Note
Punkte	10	20	15	35	20		100	
Erreicht								
Korrektor								

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beantworte **ohne Begründung** die folgenden Aussagen.

Für jedes richtige Kreuz gibt es einen Punkt. Für jedes falsche Kreuz gibt es einen Punkt Abzug. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe mindestens null Punkte.
Nicht eindeutige Markierungen werden mit Punktabzug gewertet!

(a) Seien M_1 und M_2 zwei endliche Automaten, welche die Sprachen A und B akzeptieren. Dann gibt es auch eine Turingmaschine, welche die Sprache $A \cup B$ akzeptiert.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(b) Seien M_1 und M_2 zwei Turingmaschinen, welche die Sprachen A und B akzeptieren. Dann gibt es auch einen Kellerautomaten M mit Sprache $\mathrm{L}_{\mathrm{End}}(M) = A \cup B$.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(c) Seien $\mathcal{A}$ ein Alphabet und $M = (Q, \mathcal{A}, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Welche der folgenden Aussagen gelten?

- ☐ Wenn $F = \emptyset$, dann ist $\mathrm{L}(M) = \{\lambda\}$.
- ☐ Wenn $q_0 \in F$, dann ist $\lambda \in \mathrm{L}(M)$.
- ☐ Wenn $Q = F$, dann ist $\mathrm{L}(M) = \mathcal{A}^*$.

(d) Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ zwei disjunkte Alphabete, d.h. $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$. Seien $A \subseteq \mathcal{A}_1^*$ und $B \subseteq \mathcal{A}_2^*$ zwei Sprachen. Welche der folgenden Aussagen gilt für die Sprache $C = A \cap B$?

- ☐ $C \subseteq \{\, \lambda \,\}$ und damit ist C regulär.
- ☐ $C = \emptyset$ und damit ist C nicht regulär.
- ☐ $C = \{\, \lambda \,\}$ und damit ist C regulär.
- ☐ C muss nicht leer sein und damit steht auch nicht fest,
  ob C regulär ist oder nicht.

(e) Sei op eine Operation auf Sprachen. Wann sind die kontextfreien Sprachen abgeschlossen unter der Operation op?

- ☐ Wenn es für zwei beliebige endliche Automaten M_1 und M_2, welche die Sprachen A und B akzeptieren, immer einen endlichen Automaten gibt, der die Sprache $A \operatorname{op} B$ akzeptiert.
- ☐ Wenn es für zwei beliebige Kellerautomaten M_1 und M_2, welche die Sprachen A und B akzeptieren, immer einen Kellerautomaten gibt, der die Sprache $A \operatorname{op} B$ akzeptiert.
- ☐ Wenn es für zwei beliebige Turingmaschinen M_1 und M_2, welche die Sprachen A und B akzeptieren, immer eine Turingmaschine gibt, welche die Sprache $A \operatorname{op} B$ akzeptiert.
- ☐ Wenn es für zwei beliebige kontextfreie Grammatiken G_1 und G_2 immer eine kontextfreie Grammatik gibt, welche die Sprache $\mathrm{L}(G_1) \operatorname{op} \mathrm{L}(G_2)$ erzeugt.

(f) Ein grafisch gegebener NFA ist genau dann auch ein DFA, wenn für jeden Zustand gilt, dass für alle Symbole des Alphabets höchstens eine ausgehende Kante existiert.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(g) Die Turingmaschine $M = (Q, \mathcal{A}, \Gamma, \Box, k, \delta, q_0, \emptyset)$ akzeptiert eine reguläre Sprache.

- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

(h) Eine 3-Band Turingmaschine kann Sprachen akzeptieren, die von **keiner** 1-Band Turingmaschine akzeptiert werden können.

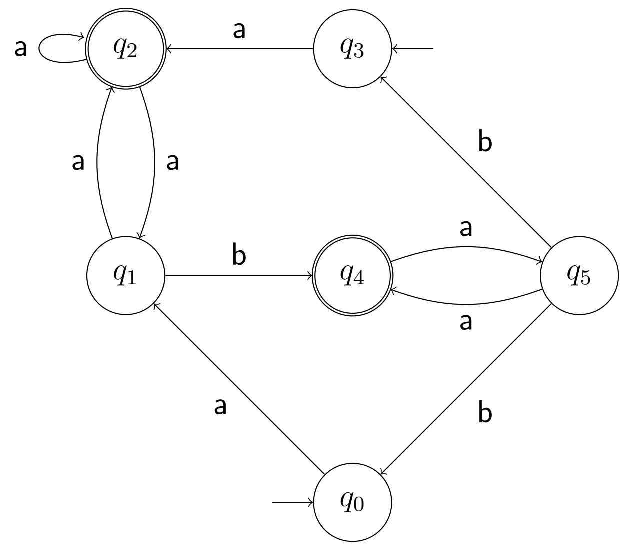
- ☐ Wahr.
- ☐ Falsch.

Aufgabe 2 **(20 Punkte)**

Gegeben seien das Alphabet $\mathcal{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b} \}$ und der NFA

$$M = (\{ q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \}, \mathcal{A}, \Delta, \{ q_0, q_3 \}, \{ q_2, q_4 \}) ,$$

wobei Δ durch den folgenden Graphen gegeben ist:



1. (4 Punkte) Gib jeweils eine Ableitung für die Wörter $w_1 = \mathsf{aab}$ und $w_2 = \mathsf{ab}$ an.
2. (2 Punkte) Argumentiere kurz, warum das Wort $w_3 = \mathsf{baa}$ nicht zur Sprache $\mathrm{L}(M)$ gehört.
3. (14 Punkte) Konstruiere nur mit Hilfe der Untermengen-Konstruktion einen DFA M_D, so dass $\mathrm{L}(M_D) = \mathrm{L}(M)$.

   Hinweis: Es genügt hier nicht, einen DFA anzugeben, ohne die Untermengen-Konstruktion zu verwenden. Nicht erreichbare Zustände dürfen weg gelassen werden.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 3 **(15 Punkte)**

Hinweise:

- Um zu zeigen, dass eine Sprache regulär ist, genügt hier die Angabe eines geeigneten Automaten. Es muss nicht gezeigt werden, dass dieser Automat tatsächlich die geforderte Sprache akzeptiert.
- Wenn Ihr im Folgenden eine reguläre Sprache benutzt, zeigt (wieder nur durch Angabe eines Automaten), dass diese regulär ist.
- Die Sprache $\{\ \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ ist nicht regulär.

1. (5 Punkte) Gegeben seien die Sprachen
$$A = \{\ \mathsf{a}^n\mathsf{b}^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+\ \}$$
und
$$B = \{\ \mathsf{b}^n\mathsf{a}^m \mid n, m \in \mathbb{N}^+\ \}.$$
Zeige oder widerlege, dass $A \cap B$ regulär ist.
2. (10 Punkte) Zeige oder widerlege, dass die Sprache $C = \{\ w \in \{\ \mathsf{a}, \mathsf{b}\ \}^* \mid |w|_{\mathsf{a}} \neq |w|_{\mathsf{b}}\ \}$ regulär ist.

Achte auf die Vollständigkeit und Nachvollziehbarkeit Deiner Argumentation.

Aufgabe 4 (35 Punkte)

Zeige (durch Beantwortung der folgenden Teilaufgaben): für zwei beliebige kontextfreie Sprachen A_1, A_2 gilt: Die Konkatenation $A_1 \cdot A_2$ dieser Sprachen ist ebenfalls kontextfrei.

Sei $\mathcal{A} = \{\, \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c} \,\}$ ein Alphabet und die Sprachen A und B wie folgt:

$$A \triangleq \{\, \mathsf{a}^n\mathsf{b}^n \in \mathcal{A}^* \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

$$B \triangleq \{\, \mathsf{b}^n\mathsf{c}^n \in \mathcal{A}^* \mid n \in \mathbb{N} \,\}$$

definiert.

1. (3 Punkte) Gib die Sprache $A \cdot B$ in Mengenschreibweise an:

$$\begin{aligned} A \cdot B &\overset{\text{Def.} A \cdot B}{=} \{\, w \in \mathcal{A}^* \mid \exists w_1 \in A, w_2 \in B.\ w = w_1 \cdot w_2 \,\} \\ &= \left\{ \boxed{} \mid \boxed{} \right\} \end{aligned}$$

2. (8 Punkte) Gib zwei PDAs M_A und M_B an, so dass gilt $A = \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_A)$ und $B = \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_B)$.
3. (7 Punkte) Gib unter Verwendung der zuvor entwickelten Automaten einen PDA M_{AB} mit $\mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_{AB}) = \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_A) \cdot \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_B)$ an.
4. (11 Punkte) Seien

$$M_C = (Q_C, \mathcal{A}_C, \Gamma_C, \Box_C, \Delta_C, q_C, F_C)$$

und

$$M_D = (Q_D, \mathcal{A}_D, \Gamma_D, \Box_D, \Delta_D, q_D, F_D)$$

nun zwei beliebige Kellerautomaten. Gib einen Kellerautomaten M_{CD} an, so dass gilt:

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_{CD}) = \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_C) \cdot \mathrm{L}_{\mathrm{Kel}}(M_D).$$

Hinweise:

- Zur Vereinfachung darf angenommen werden, dass gilt: $\Gamma_C \cap \Gamma_D = \emptyset$ und $Q_C \cap Q_D = \emptyset$, also inbesondere auch $\Box_C \neq \Box_D$.
- Verwende für den Automaten M_{CD} ein neues Kellersymbol $\Box_{CD} \notin (\Gamma_C \cup \Gamma_D)$ und einen neuen Startzustand $q_{CD} \notin (Q_C \cup Q_D)$.
- Beachte: die Startkonfiguration für ein Wort w von M_{CD} ist dann $(q_{CD}, w, \Box_{CD})$.

5. (6 Punkte) Argumentiere unter der Annahme, dass Deine Konstruktion von M_{CD} korrekt ist, warum damit nun gezeigt ist, dass die kontextfreien Sprachen unter Konkatenation abgeschlossen sind.
Hinweis: Hier muss also **nicht** argumentiert werden, warum die Konstruktion von M_{CD} korrekt ist.

Name: Vorname: Matrikelnummer:

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Sei $\mathcal{A} = \{ \mathsf{0}, \mathsf{1} \}$ ein Alphabet und die Sprache B gegeben wie folgt:

$$B \triangleq \{ w \in \mathcal{A}^* \mid \exists v \in \mathcal{A}^*.\ \exists n \in \mathbb{N}.\ n > 1 \land w = v^n \} .$$

1. (3 Punkte) Gib 3 paarweise verschiedene Wörter aus $\mathcal{A}^* \setminus B$ an.
2. (11 Punkte) Gib eine NTM M_B mit maximal 2 Bändern und maximal 8 Zuständen an, für die gilt $\mathrm{L}(M_B) = B$.
3. (6 Punkte) Beschreibe kurz aber präzise, warum und wie M_B das Geforderte leistet.

Name: Vorname: Matrikelnummer: