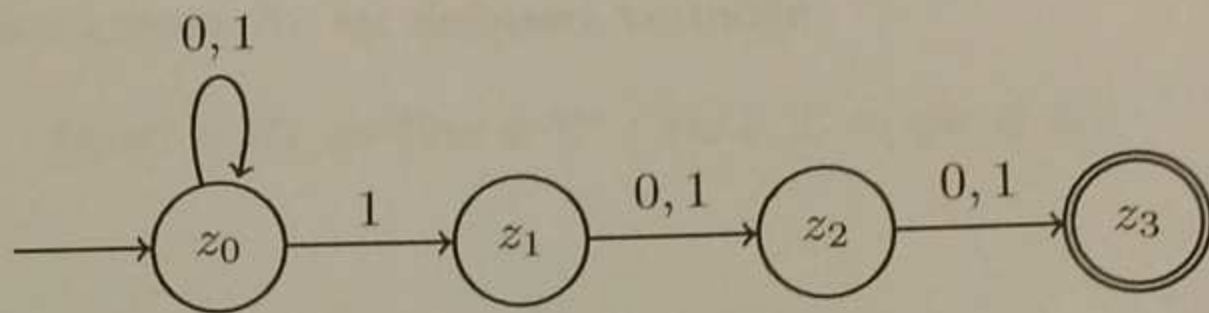


(1+6 Punkte)

Aufgabe 1: Endliche Automaten

Sei $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3\}, \{0, 1\}, \delta, \{z_0\}, \{z_3\})$ mit δ gegeben durch:



- (a) Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der $T(M)$ beschreibt (ohne Begründung).
- (b) Geben Sie einen NFA oder DFA M' mit $T(M') = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \notin T(M)\}$ an.

Aufgabe 2: **Rechtskongruenz**

(6 Punkte)

Sei $L \subseteq \Sigma^* = \{0, 1\}^*$ eine Sprache. Angenommen es gilt $(11, 1) \in R_L$ und $(0, 1) \notin R_L$.
Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Es existiert eine natürliche Zahl $n \geq 1$ mit $(1^n, 0) \in R_L$.

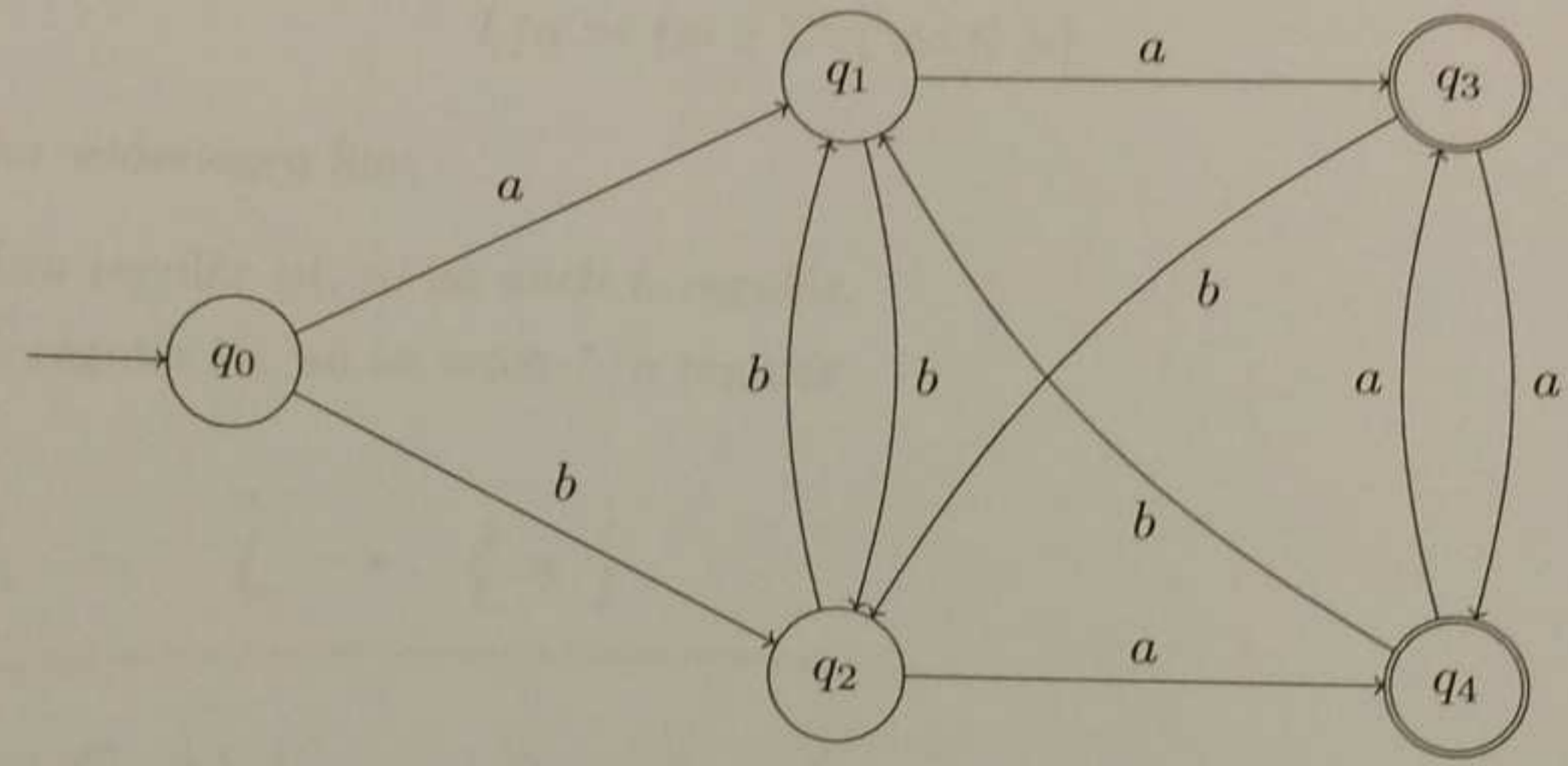
Hinweis: Die Rechtskongruenz R_L ist definiert vermöge

$$(x, y) \in R_L \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L).$$

Aufgabe 3: Minimierung endlicher Automaten

(6 Punkte)

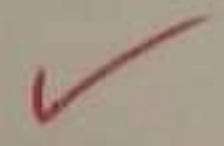
Gegeben sei ein DFA $M = (Z, \Sigma, \delta, q_0, E)$, wobei $Z = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$ und $E = \{q_3, q_4\}$. Die Überföhrungsfunktion δ sei wie folgt gegeben:



Geben Sie einen minimalen DFA M' mit $T(M') = T(M)$ an.

Sie können für die Minimierung von M die folgende Tabelle benutzen.

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4			
q_0								
q_1						$\begin{matrix} 3 & 7 \\ 2 & 2 \end{matrix}$		
q_2						$\begin{matrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{matrix}$	
q_3						X	X	X
q_4						X	X	X



δ

Aufgabe 4: **Reguläre Sprachen**

(9 Punkte)

Sei $L \subseteq \Sigma^*$. Für ein Symbol $a \in \Sigma$ definieren wir

$$L/a := \{w \in \Sigma^* \mid wa \in L\}.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

- (a) Wenn L/a regulär ist, so ist auch L regulär.
- (b) Wenn L regulär ist, so ist auch L/a regulär.

Aufgabe 5: **Büchi-Automaten**

(4 Punkte)

Geben Sie für die folgende Sprache einen nichtdeterministischen Büchi-Automaten an (ohne Begründung).

$$L_a = \{x \in \{a, b\}^\omega \mid \text{in } x \text{ kommen zwischen je zwei } b\text{'s ungerade viele } a\text{'s vor.}\}$$

Aufgabe 6: Grammatiken

(1+2+6 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine Grammatik mit

$$P = \{S \rightarrow AC, \\ A \rightarrow aABC \mid aBC, \\ CB \rightarrow BC, \\ aBB \rightarrow ab, bBB \rightarrow bb \\ bC \rightarrow bcc, cC \rightarrow ccc\}.$$

- (a) Geben Sie den größtmöglichen Typ der Grammatik G bezüglich der Chomsky-Hierarchie an.
Hinweis: Der größtmögliche Typ einer Grammatik ist i , wenn sie vom Typ i ist aber nicht vom Typ $i + 1$.
- (b) Geben Sie die von der Grammatik G erzeugte Sprache $L(G)$ an (ohne Begründung).
- (c) Zeigen Sie, dass $L(G)$ nicht kontextfrei ist, indem Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen benutzen.

Hinweis: Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen:

Ist eine Sprache L kontextfrei, so existiert eine natürliche Zahl n derart, dass sich alle $z \in L$ der Länge $|z| \geq n$ so in der Form $z = uvwxy$ für gewisse $u, v, w, x, y \in \Sigma^*$ zerlegen lassen, dass gilt:

- (1) $|vx| \geq 1$,
- (2) $|vwx| \leq n$ und
- (3) für alle $i \geq 0$ ist $uv^iwx^iy \in L$.

Das DOMINATING SET-Problem ist bereits aus der Vorlesung bekannt.

DOMINATING SET

Eingabe: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Besitzt G eine dominierende Knotenmenge V' der Größe höchstens k , d. h. $\exists V' \subseteq V, |V'| \leq k : \forall u \in V : u \in V' \vee (u \text{ hat mindestens einen Nachbarn in } V')$?

Ein Graph $G = (V, E)$ wird *bipartit* genannt, falls es eine Zerlegung von V in V_1 und V_2 mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gibt, sodass jede Kante einen Endknoten in V_1 und einen in V_2 hat. Entsprechend ist das BIPARTITE DOMINATING SET-Problem wie folgt definiert:

BIPARTITE DOMINATING SET

Eingabe: Ein bipartiter Graph $G = (V_1 \cup V_2, E)$ und ein $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Besitzt G eine dominierende Knotenmenge der Größe höchstens k ?

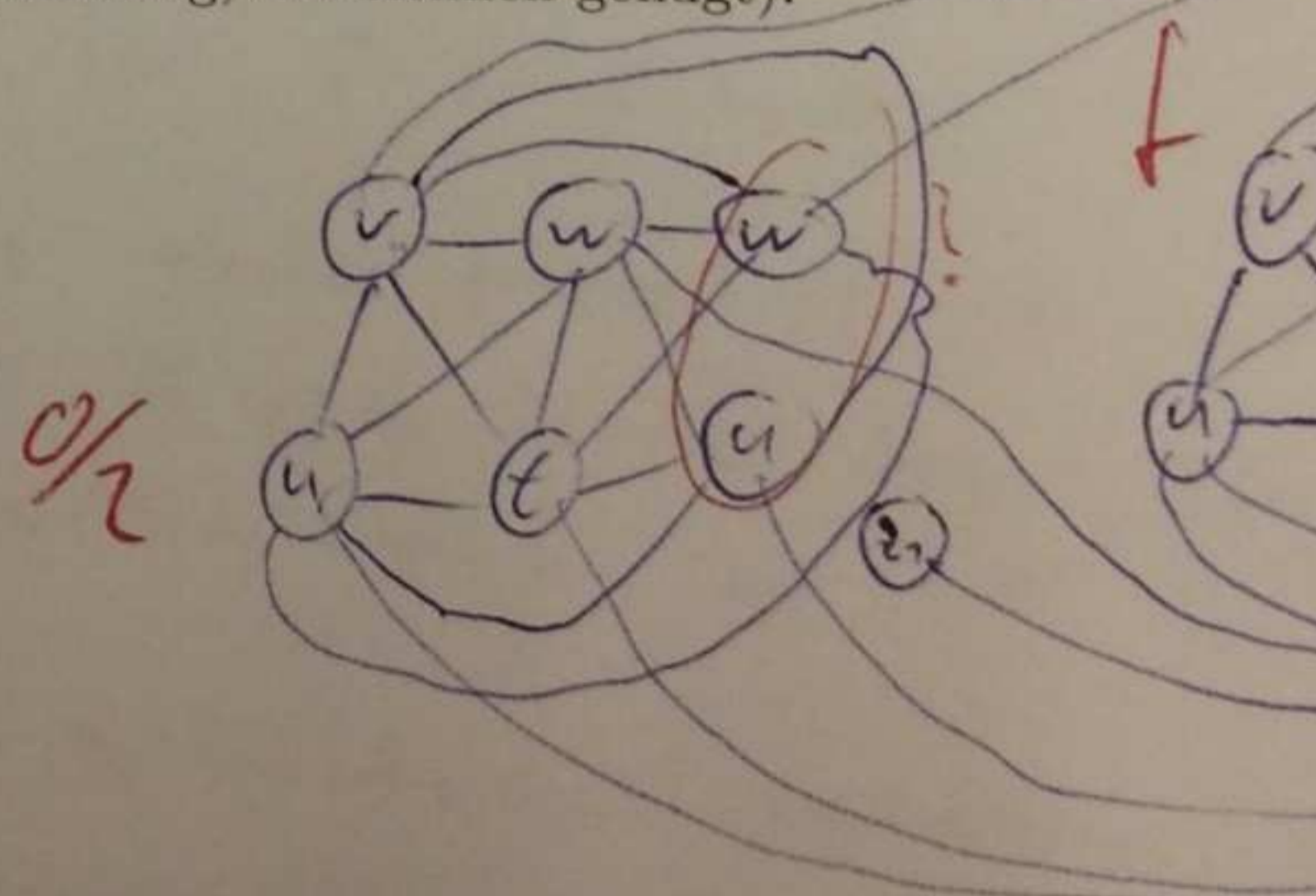
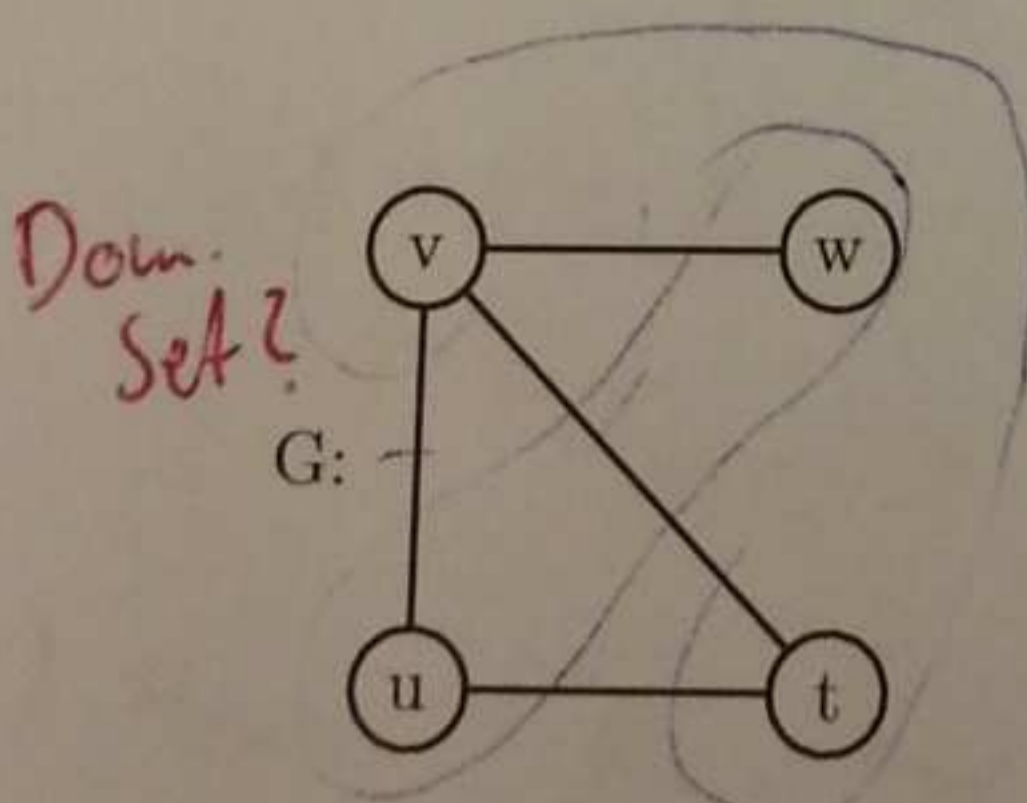
Aus der Vorlesung ist bekannt, dass DOMINATING SET NP-vollständig ist. Betrachten Sie folgende Reduktion von DOMINATING SET auf BIPARTITE DOMINATING SET.

Reduktion: Sei der Graph $G = (V, E)$ und $k \in \mathbb{N}$ eine Eingabe für DOMINATING SET. Wir konstruieren einen Graph $G' = (V_1 \cup V_2, E')$ in 3 Schritten:

1. Füge in V_1 und V_2 jeweils eine Kopie von V ein. Bezeichne mit v^1 bzw. v^2 die Kopie des Knotens $v \in V$ in V_1 bzw. V_2 .
2. Für jede Kante $\{u, v\} \in E$ füge die Kanten $\{u^1, v^2\}$ und $\{v^1, u^2\}$ ein. Füge zusätzlich die Kante $\{u^1, u^2\}$ für alle Knoten $u \in V$ ein.
3. Füge einen Knoten z_1 zu V_1 hinzu und auch einen Knoten z_2 zu V_2 . Füge die Kante $\{z_1, z_2\}$ hinzu und auch die Kante $\{u^1, z_2\}$ für alle $u \in V$.

Wir definieren nun die Polynomzeitreduktion f durch $f(G, k) = (G', k + 1)$.

- (a) Geben Sie denjenigen Graph G' an, welcher durch obige Reduktion für den wie folgt gegebenen Graphen G konstruiert wird. Geben Sie in beiden Graphen eine dominierende Menge minimaler Größe an (ohne Begründung, einzeichnen genügt).



- (b) Überprüfen Sie die obige Reduktion f auf Korrektheit und korrigieren Sie diese gegebenenfalls. Beweisen Sie anschließend die Korrektheit der (eventuell korrigierten) Reduktion, d. h. zeigen Sie

$$\forall (G, k) : (G, k) \in \text{DOMINATING SET} \Leftrightarrow f(G, k) \in \text{BIPARTITE DOMINATING SET.}$$

Beweisen Sie darauf aufbauend, dass BIPARTITE DOMINATING SET NP-vollständig ist.

Aufgabe 8: Vermischtes

(9 Punkte)

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. bewerten Sie die Aussagen bzgl. ihres Wahrheitsgehaltes. Begründen Sie ihre Antworten jeweils kurz in 2-3 Sätzen.

- a) Wäre das „P vs. NP“-Problem gelöst, wenn man zeigt, dass es eine kontextfreie Sprache L gibt, sodass $L \leq_m^p L'$ für alle $L' \in \text{NP}$?
- b) Unter der Annahme $P = \text{NP}$ gilt:
 - Jede NP-schwere Sprache kann in Polynomzeit auf einer deterministischen Turingmaschine entschieden werden.
 - Jede Sprache in P kann polynomiell auf SAT reduziert werden.
 - Für jede endliche nichtleere Sprache A gilt, dass $L \leq_m^p A$ für alle $L \in \text{NP}$.
- c) Da Typ-2 Sprachen nicht unter Schnitt abgeschlossen sind, kann es keine zwei Typ-2 Sprachen A, B geben, sodass auch $A \cap B$ eine Typ-2 Sprache ist.
- d) Es gibt unendlich viele Typ-1 Sprachen, die durch reguläre Ausdrücke beschrieben werden können.