

# 1. Teilleistung TheGI 3

18. Dezember 2013

Name, Vorname: \_\_\_\_\_

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): \_\_\_\_\_

Versuch-Nr.: \_\_\_\_\_ Matrikel-Nr.: \_\_\_\_\_

Los-Nr.:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

**Summe:**

**Note:**

**Punkte:** Insgesamt sind in dieser Teilleistung 90 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.

**Bearbeitungszeit:** Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Zusätzlich gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.

**Form der Abgabe:** Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.

**Hilfsmittel:** Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.

**Los-Nummer:** Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

**Aufgabe 1**

10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere Antwort gibt 0,5 Punkte.

$\varphi$  ist eine beliebige aussagenlogische Formel und  $\Phi$  eine beliebige Menge von aussagenlogischen Formeln.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$(X \wedge Y) \rightarrow (X \vee Y)$ ist allgemeingültig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
2.	$(X \vee Y) \rightarrow (X \wedge Y)$ ist erfüllbar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
3.	Die Negation einer unerfüllbaren Formel ist allgemeingültig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
4.	Es gibt eine erfüllbare Formel, deren Negation erfüllbar ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
5.	Wenn $\Phi \models \varphi$ gilt, dann gilt $\text{var}(\varphi) \subseteq \text{var}(\Phi)$	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
6.	Wenn $\Phi \models \varphi$ gilt, dann ist $\varphi$ erfüllbar.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
7.	$\Phi$ ist erfüllbar gdw. eine endliche Teilmenge von $\Phi$ erfüllbar ist.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
8.	Für jede Turingmaschine $M$ gibt es eine Formel, die erfüllbar ist gdw. $M$ das leere Wort akzeptiert.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
9.	Jede entscheidbare Sprache ist in $\mathcal{NP}$ .	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
10.	Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist $\mathcal{NP}$ -vollständig.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**Aufgabe 2**

15 Punkte

HALTEPROBLEM

*Eingabe:* Eine Turingmaschine  $\mathcal{M}$   
*Problem:* Hält  $\mathcal{M}$  auf der leeren Eingabe?

UNIVERSALITÄTSPROBLEM

*Eingabe:* Eine Turingmaschine  $\mathcal{M}$   
*Problem:* Gilt für alle Eingaben  $w$ , dass  $\mathcal{M}$  die Eingabe  $w$  akzeptiert?

Geben Sie eine Reduktion des Halteproblems auf das Universalitätsproblem an. Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3**

5+5+5=15 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

- (i) Für alle  $\varphi, \psi \in \text{AL}$  gilt: Wenn  $\varphi \models \psi$  und  $\psi \models \varphi$  gilt, dann gilt  $\varphi \equiv \psi$ .
- (ii) Für alle  $\varphi, \psi \in \text{AL}$  gilt: Es gilt  $\varphi \models \psi$  oder  $\psi \models \varphi$ .
- (iii) Für alle  $\varphi, \psi, \chi \in \text{AL}$  gilt: Wenn  $\varphi \models \psi$  und  $\psi \models \chi$  gilt, dann gilt  $\varphi \models \chi$ .

**Aufgabe 4**

3+3+3=9 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Äquivalenzen.

- (i)  $X \rightarrow \perp \equiv \neg X$ .
- (ii)  $X \wedge (Y \rightarrow Z) \equiv (X \wedge Y) \rightarrow (X \wedge Z)$
- (iii)  $X \wedge (X \rightarrow Y) \equiv Y$

**Aufgabe 5**

3+3+5+5=16 Punkte

- (i) Sei  $\Phi$  eine endliche Menge von aussagenlogischen Formeln und  $\psi$  eine aussagenlogische Formel. Definieren Sie, was es bedeutet, dass  $\Phi \models \psi$ . Erklären Sie, wie sie  $\Phi \models \psi$  mit Hilfe der Resolution beweisen können.
- (ii) Seien  $C_1$  und  $C_2$  aussagenlogische Klauseln. Definieren Sie, was es bedeutet, dass  $C_1$  und  $C_2$  miteinander resolviert werden können, und geben Sie die Definition der Menge der Resolventen von  $C_1$  und  $C_2$  an.
- (iii) Sei  $C$  eine Resolvente von  $C_1, C_2$ . Beweisen Sie, dass  $\{C_1, C_2\} \models C$ .
- (iv) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolution, dass die folgende Formel unerfüllbar ist.

$$(A \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (D \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg D).$$

**Aufgabe 6**

7+8=15 Punkte

Sei  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

- (i) Geben Sie eine aussagenlogische Formel  $\varphi$  an, sodass es genau eine Belegung  $\beta : \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}$  gibt mit  $\beta \models \varphi$ .
- (ii) Geben sie eine aussagenlogische Formel  $\varphi$  an mit  $\text{var}(\varphi) \subseteq \{X_1, \dots, X_n\}$ , sodass es genau  $2^{n-1}$  verschiedene Belegungen  $\beta : \{X_1, \dots, X_n\} \rightarrow \{0, 1\}$  gibt mit  $\beta \models \varphi$ .

Begründen Sie ihre Antworten.

**Aufgabe 7**

10 Punkte

Ein unendlicher Graph  $G := (V, E)$  besteht aus einer unendlichen Knotenmenge  $V$  und einer Kantenmenge  $E \subseteq \{\{u, v\} : u \neq v, u, v \in V\}$ .  $G$  ist 2-färbbar, wenn es eine Funktion  $c : V \rightarrow \{0, 1\}$  gibt, so dass  $c(u) \neq c(v)$  für alle Kanten  $\{u, v\} \in E$ .

Zeigen Sie, dass ein unendlicher Graph genau dann 2-färbbar ist, wenn bereits jeder endliche Untergraph 2-färbbar ist.