Bemerkung. Ich bin selbst Student und habe mir einfach mal überlegt, was für Aufgaben in einer Klausur auftreten könnten.

Aufgabe 1

Forme folgende Formeln in Pränex-Normalform und in Negations-Normalform um.
Markiere zuerst die Zugehörigkeiten der Variablen zu den Quantoren sowie die freien Variablen.

(i) $\forall x((\exists y \forall x R(x,y)) \leftrightarrow \exists y Q(x,y,z))$

(ii) $\forall z \exists z((\forall z P(z)) \to R(y,z))$

Lösung 1

Stelle zuerst die NNF, dann die Pränex-Normalform auf.

(i)

$$
\begin{aligned}
&\forall x((\exists y \forall x R(x,y)) \land \exists y Q(x,y,z)) \lor ((\neg\exists y \forall x R(x,y)) \land \neg\exists y Q(x,y,z)) \\
\equiv &\forall x((\exists y \forall x R(x,y)) \land \exists y Q(x,y,z)) \lor ((\forall y \exists x \neg R(x,y)) \land \forall y \neg Q(x,y,z)) && \text{NNF} \\
\equiv &\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 \forall y_3 \exists x_3 \forall y_4 \left((R(x_2,y_1) \land Q(x_2,y_2,z)) \lor (\neg R(x_3,y_3) \land \neg Q(x_3,y_4,z)\right) && \text{Pränex}
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
\forall z \exists z \left(\neg(\forall z P(z)) \lor R(y,z)\right) &\equiv \forall z \exists z \left(\exists z \neg P(z) \lor R(y,z)\right) && \text{NNF} \\
&\equiv \forall z_1 \exists z_2 \exists z_3 (\neg P(z_3) \lor R(y,z_2)) && \text{Pränex}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(i) Zwei σ-Strukturen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ sind isomorph, wenn die Duplikatorin das unendliche EF-Spiel $\mathfrak{G}_\infty(\mathscr{A},\mathscr{B})$ gewinnt.

(ii) Eine Klasse $\mathscr{K}$ von σ-Strukturen ist endlich axiomatisierbar genau dann, wenn $\mathscr{K}$ von einer einelementigen Formelmenge (d.h. von einer einzigen Formel) axiomatisiert wird.

(iii) Es gibt aussagenlogische Formeln, welche sich im Resolutionskalkül ableiten lassen, aber nicht im Sequenzkalkül.

(iv) Die Vereinigung von zwei Theorien ist wieder eine Theorie.

Lösung 2

(i) falsch

(ii) wahr

(iii) falsch

(iv) falsch

Aufgabe 3

Weise axiomatisch nach: $x \leftrightarrow y \equiv (\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)$

Lösung 3

Sei β eine beliebige Belegung. Dann gilt

$$\begin{aligned}
[\![x \leftrightarrow y]\!]^\beta &= \max(\min([\![x]\!]^\beta, [\![y]\!]^\beta), \min(1 - [\![x]\!]^\beta.1 - [\![y]\!]^\beta)) \\
&= \max([\![x \wedge y]\!]^\beta, \min([\![\neg x]\!]^\beta, [\![\neg y]\!]^\beta)) \\
&= \max([\![x \wedge y]\!]^\beta, [\![\neg x \wedge \neg y]\!]^\beta) \\
&= \max([\![\neg x \wedge \neg y]\!]^\beta, [\![x \wedge y]\!]^\beta) = [\![(\neg x \wedge \neg y) \vee (x \wedge y)]\!]^\beta
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph mit $V = \{1, \dots, n\}$. Wir identifizieren G mit einer aussagenlogischen Interpretation β_G in folgender Weise: Der Definitionsbereich von β_G ist $\{X_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ und es gilt $[\![X_{ij}]\!]^{\beta_G} \Leftrightarrow \{i, j\} \in E$. Gib eine Formel φ an, mit $[\![\varphi]\!]^{\beta_G} = 1$ genau dann, wenn G einen Eulerkreis besitzt.
Es gibt einen Bonuspunkt, wenn die Formel polynomielle Länge bezüglich $|V| + |E|$ besitzt.

Lösung 4

Sei $n := |V|$ und $m := |E|$. Definiere die folgende Menge von Funktionen

$$\mathcal{F} := \left\{ f : [1, m] \to [1, n] : \bigwedge_{i=2}^{m-1} \bigwedge_{j=1}^{i-1} \{f(i), f(i+1)\} \neq \{f(j), f(j+1)\} \right\}$$

$\mathcal{F}$ beschreibt die Menge aller Knotenfolgen der Länge m, bei welchen nie eine Folge doppelt oder in umgekehrter Reihenfolge auftritt. Da dies eine endliche Menge ist, kann man sie als Indexmenge bei einer Konjunktion verwenden.

$$\bigvee_{f \in \mathcal{F}} \left(\bigwedge_{i=1}^{m-1} X_{f(i), f(i+1)} \wedge X_{f(m), f(1)} \right)$$

Aufgabe 5

Sei $\sigma = \{R\}$ eine Signatur mit einer zweistelligen Relation R. Sei $\mathscr{A} = (\mathbb{N}, |)$ und $\mathscr{B} = (\mathbb{Z}, |)$, wobei $| = \{(a, b) : \exists c (a \cdot c = b)\}$ die Teilbarkeitsrelation ist. Finde das maximale m so, dass $\mathscr{A} \equiv_m \mathscr{B}$. Begründe deine Antwort und gib eine Formel φ vom Quantorenrang $m + 1$ an so, dass $\mathscr{A} \models \varphi$ aber $\mathscr{B} \not\models \varphi$.

Lösung 5

Behauptung. *Es ist $m = 1$.*

Beweis. Da in beiden Strukturen jedes Element mit sich selbst in Relation steht, kann die Duplikatorin mit einem beliebigen Element antworten.
Um in 2 Zügen zu gewinnen, wählt der Herausforderer $1 \in \mathbb{N}$. Sei $x \in \mathbb{Z}$ die Antwort der Duplikatorin. Im Fall $x = 0$ wählt der Herausforderer $2 \in \mathbb{N}$. Es gilt $(1, 2) \in R^{\mathscr{A}}$, aber die Duplikatorin kann kein $y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ wählen mit $0 \mid y$. Also hat hat sie in diesem Fall verloren. Sei also $x \neq 0$. Dann wählt der Herausforderer $-x \in \mathbb{Z}$. Es gilt $(-x, x) \in R^{\mathscr{B}}$, aber es gibt kein $y \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, mit $(y, 1) \in R^{\mathscr{A}}$. Also hat die Duplikatorin auch in diesem Fall verloren. $\square$

$$\exists x\,(\forall y R(x,y) \wedge \exists y(\neg(x=y) \wedge R(x,y))$$

Aufgabe 6

Beweise: Ein unendlicher Graph $G = (V, E)$ ist bipartit genau dann, wenn jeder endliche Teilgraph bipartit ist.

Lösung 6

Sei $c : V \to \{1, 2\}$ eine Bipartition von G. Sei $G' = (V', E')$ ein endlicher Teilgraph von G. Dann ist $c_{|V'}$ eine Bipartition von G'. Folglich ist G' bipartit.
Angenommen alle endlichen Teilgraphen von G sind bipartit. Setze

$$\Phi = \{Y_{i0} \vee Y_{i1}, \neg(Y_{i0} \wedge Y_{i1} : i \in V\} \cup \{\neg(Y_{ik} \wedge Y_{jk}) : \{i,j\} \in E, k \in \{0,1\}\}$$

Ist $c : V \to \{0, 1\}$ eine Bipartition, so ist

$$\beta = \{(Y_{v,c(v)}, 1), (Y_{v,1-c(v)}, 0) : v \in V\}$$

eine erfüllende Belegung. Umgekehrt erhält man aus eine erfüllenden Belegung β eine Bipartition

$$c = \{(v, 0) : \beta(Y_{v0}) = 1\} \cup \{(v, 1) : \beta(Y_{v1}) = 1\}$$

Damit ist Φ eine Formelmenge, welche erfüllbar ist genau dann, wenn G bipartit ist. Sei Φ_0 eine endliche Teilmenge von Φ. Sei G_0 der von der Knotenmenge

$$\{v \in V : Y_{v0} \in \Phi_0 \vee Y_{v1} \in \Phi_0\}$$

induzierte Teilgraph von G. Nach Voraussetzung ist G_0 bipartit. Damit ist die G_0 beschreibende Formelmenge Φ_1 erfüllbar. Da aber nach Konstruktion $\Phi_0 \subseteq \Phi_1$, ist somit auch Φ_0 erfüllbar. Da jede endliche Teilmenge von Φ somit erfüllbar ist, folgt nach Kompaktheitssatz, dass Φ erfüllbar ist. Damit ist G bipartit. $\square$

Aufgabe 7

Beweise, dass es Theorien gibt, die kein endliches Axiomsystem haben.
Hinweis: Betrachte zu einem Graphen G die Formel φ_n, die genau dann erfüllt ist, wenn G eine vollständige Zusammenhangskomponente der Größe genau n hat.

Lösung 7

Definiere

$$\varphi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\left(\bigwedge_{i=2}^{n} \bigwedge_{j=1}^{i-1} \neg(x_i = x_j) \wedge E(x_i, x_j) \right) \wedge \forall y \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg(y = x_i) \right) \to \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \neg E(y, x_i) \right) \right)$$

und setze $\Phi = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Sei $\Psi \subseteq \Phi$ mit $\varphi_k \notin \Psi$. Setze

$$G_0 = \bigcup_{\varphi_n \in \Psi} K_n$$

Dann gilt $G \models \Psi$ aber $G \not\models \varphi_k$. Damit gilt $\Psi \not\models \varphi_k$. Folglich ist $\varphi_k \notin \Psi^{\models}$. Damit ist $\{\Psi^{\models} : \Psi \subseteq \Phi\}$ eine Menge paarweise verschiedener Theorien. Aber zugleich ist dies auch Potenzmenge einer abzählbaren Menge und somit überabzählbar. Ein endliches Axiomsystem ist eine endliche Menge von endlichen Formeln. Somit ist die Menge aller endlichen Axiomsysteme abzählbar. Folglich ist $\{\Phi_0^{\models} : |\Phi_0| < \infty\}$ abzählbar. Also muss es Theorien geben, welche nicht endlich axiomatisierbar sind.