Aufgabe 1: MC (10 Punkte) wahr 1P , falsch 0P, keine Ahnung 0.5P

- Jede Struktur hat mindestens eine Substruktur JA
- Jeder Isomorphismus ist ein Homomorphismus JEIN?
- jeder bijektive Homomorphismus ist ein Isomorphismus JA
- Das Erfüllbarkeitsproblem der Aussagenlogik ist in NP JA
- Eine Turingmaschine kann in Exponentialzeit entscheiden ob es ein prädikatenlogischer Satz allgemeingültig ist. NEIN
- Jede gültige prädikatenlogische Sequenz hat einen Beweis im Sequenzenkalkül. –
- Es gibt ismorphe Strukturen A =~ B, sodass Herausforderer das Spiel gewinnt JEIN
- Wenn Tau eine endl Signatur ist, ist das Universum jeder tau Struktur endlich JA
- Das Problem, zu entscheiden, ob eine prädikatenlogische Sequenz Gültig ist, ist entscheidbar. NEIN
- Jede endliche Teilmenge von IN ist entscheidbar. JA

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Sei $\partial = \{f\}$ eine Signatur mit einem 1-stelligen Funktionssymbol.
Sei $A = (IN, f^A)$ mit $f^A(n) = n + 1$ für alle $n \in IN$. Wie viele Substrukturen besitzt A?
Falls A endlich viele Substrukturen besitzt , geben Sie die genaue Zahl an und begründen Sie diese.
Falls A unendlich viele Substrukturen besitzt, begründen Sie ob es abzählbar oder überabzählbar viele Substrukturen gibt.

Lösung:

- A besitzt abzählbar unendlich viele Substrukturen.
- Fall 1: A ist eine Substruktur von sich selbst.
- Fall 2: Rekursiv definiert mittels Formel f(n)=n+1.
  - Dh. die nächste Substruktur wäre IN ohne 0
  - die übernächste wäre (IN ohne 1 und ohne 0)
  - die überübernächste wäre (IN ohne 2, ohne 1 und ohne 0)
  - und so weiter. Da IN abzählbar unendlich viele Elemente hat, so hat auch die Struktur A mit der Formel f(n)=n+1 abzählbar unendlich viele Substrukturen.

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Sei ∂ eine Signatur, A, B ∂-Strukturen und

$T(A) = \{Phi \in FO[\partial] : Phi \text{ ist ein Satz und } A \models phi\}$

Zeigen Sie, dass A elementar äquivalent zu B ist, gdw B I= T(A).

Lösung Von Nabil.

- Zz: A ≡ B <=> B I= T(A)
- A ≡B <=> A I= Phi ∈ FO[∂]. A I= Phi <=> B I= Phi
  <=> (A I= T(A) <=> B I= T(A))
  <=> B I= T(A)
  ende.

Aufgabe 4 : (15 Punkte)

Sei ∂ = {M} eine Signatur mit einem 3-stelligen Relationssymbol. Wir definieren

A = (Z, M^A)
B = (Q, M^B)
C = (Z x Z, M^C)
M^A = {(x,y,z) ∈ Z^3 : x+y = z}
M^B = {(x,y,z) ∈ Q^3 : x+y = z}
M^C = {((x,x'),(y,y'),(z,z')) ∈ (ZxZ)^3 : x+y = z und x'+y' = z'}

Beantworten Sie für die beiden folgenden Ehrenfeucht-Fraise-Spiele, welcher Spieler das Spiel gewinnt.

Geben Sie für den gewinnenden Spieler jeweils eine Gewinnstrategie an und begründen Sie, warum es eine Gewinnstrategie ist.

i) ∂(A,B)

Lösung:

- Herausforderer gewinnt das Spiel.
- Gewinnstrategie: m= 2
  - Runde 1:
    - H. wählt b1 = 3 ∈ Q
    - D. wählt a1 = 3 ∈ Z
  - Runde 2:
    - H. wählt b2 = 3/2 ∈ Q
    - D. wählt a1 = 1 ∈ Z → D verliert das Spiel.
  - Begründung:
    - H. hat b2 gewählt mit (b2,b2,b1) ∈M^B
    - D. konnte kein a2 finden sodass (a2,a2,a1) ∈M^A

ii) ∂(A,C) – Kein Plan

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Regeln des prädikatenlogische Sequenzenkalküls korrekt sind. Sie dürfen dabei keine anderen Regeln des Sequenzenkalküls verwenden.

i) Links und ii) Rechts

$$\frac{\Phi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi} \qquad \frac{\Phi, \forall x \varphi, \forall x \psi \Rightarrow \Delta, \exists x(\varphi' \vee \psi')}{\Phi, \forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi', \exists x \psi'}$$

5. Aufgabe

1) Annahme: $\Phi \Rightarrow \Delta$ ist gültig.

Folgerung: Es gibt eine Belegung oder eine Interpretation $\mathfrak{J}$ sodass $\mathfrak{J} \models \Phi$ und es existiert ein $\delta \in \Delta$ mit $\mathfrak{J} \models \delta$. Daraus folgt, dass $\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi$ gültig ist.

2) Annahme: $\Phi, \forall x \varphi, \forall x \psi \Rightarrow \Delta, \exists x(\varphi' \vee \psi')$ ist gültig

Zu zeigen: $\Phi, \forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi', \exists x \psi'$ gültig ist.

Aus der Annahme: ~~Da~~ Sei $\mathfrak{J}$ eine Interpretation.

1) $\mathfrak{J} \models \Phi$

2) $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$ 3) $\mathfrak{J} \models \psi$ 4) $\mathfrak{J} \models \exists x(\varphi' \vee \psi')$

5) $\mathfrak{J} \models \delta$ mit $\exists \delta \in \Delta$.

(4), (5) $\Rightarrow$ $\mathfrak{J} \models \delta$ mit $\delta \in \Delta$ oder $(\mathfrak{J} \models (\exists x \varphi')$ oder $\mathfrak{J} \models (\exists x \psi'))$ (6)

Aus (2), (3) folgt: $\mathfrak{J} \models \forall x \varphi$ und $\mathfrak{J} \models \forall x \psi$ dann auch $\mathfrak{J} \models \forall x(\varphi \wedge \psi)$ (7)

Aus (1), (6), (7) folgt: $\mathfrak{J} \models (\Phi, \forall x(\varphi \wedge \psi) \Rightarrow \Delta, \exists x \varphi', \exists x \psi')$

$\Rightarrow$ Beide Regeln der Sequenzenkalkül sind korrekt somit auch gültig.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Sei Phi eine Formel der Prädikatenlogik. Beweisen Sie die Gültigkeit der folgenden Sequenzenkalküls mit den Regeln der Sequenzenkalküls, die im Anhang dieser Klausur gegeben sind.

$$\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \neg \exists x \neg \varphi(x)$$

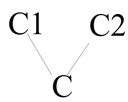
Lösung:

$$\overline{\varphi(c) \Rightarrow \varphi(c)}$$
$$(\forall\Rightarrow)$$
$$\overline{\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \varphi(c)}$$
$$(\neg\Rightarrow)$$
$$\overline{\forall x\, \varphi(x), \neg \varphi(c) \Rightarrow \{\}}$$
$$(\exists\Rightarrow)$$
$$\overline{\forall x\, \varphi(x), \exists x \neg \varphi(x) \Rightarrow \{\}}$$
$$(\Rightarrow\neg)$$
$$\overline{\forall x\, \varphi(x) \Rightarrow \neg \exists x \neg \varphi(x)}$$

Aufgabe 7: (2+3+5+5 = 15 Punkte)

i) Sei Φ eine aussagenlogische Formelmenge Ψ eine aussagenlogische Formel. Definieren Sie, was es bedeutet, dass Φ I= Ψ. Erklären Sie, wie Sie Φ I=Ψ mit Hilfe der Resolution beweisen können.
   1. Φ |= ψ genau dann, wenn Φ ∪ ¬ψ unerfüllbar ist.

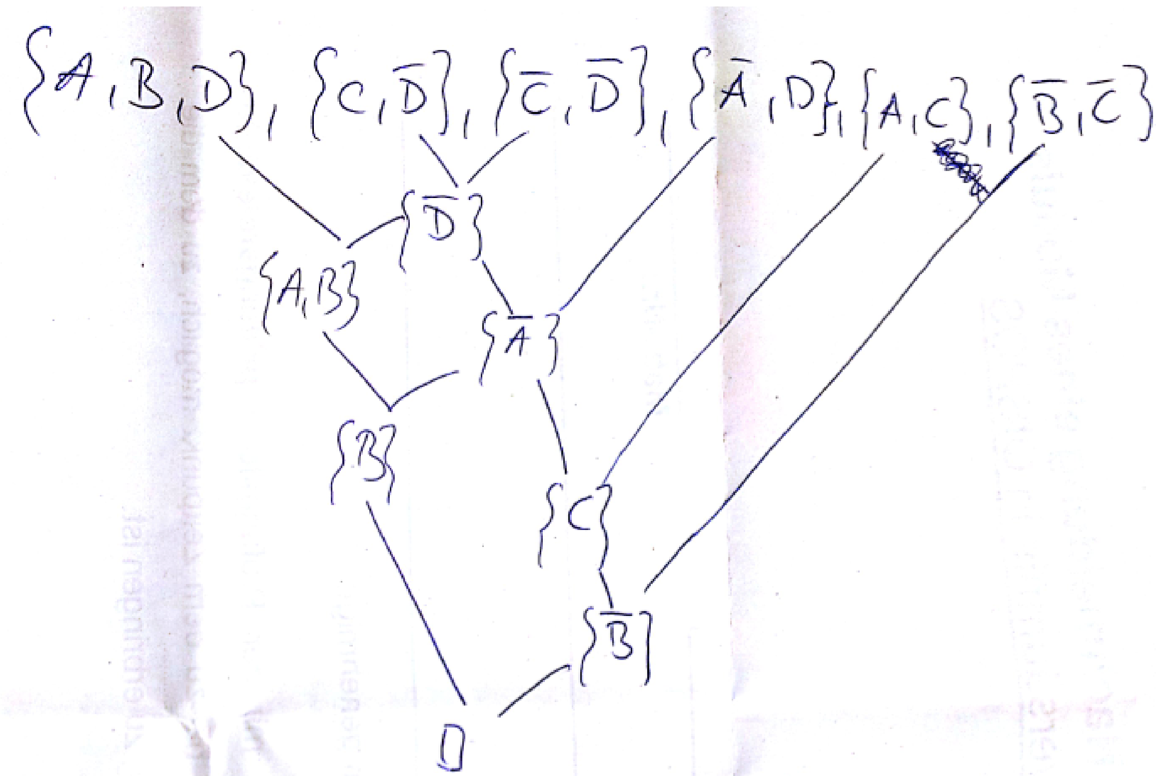
ii) Seien C1 und C2 aussagenlogische Klausel. Definieren Sie was es bedeutet, dass C1 und C2 miteinander resolviert werden können und geben Sie die Definition der Menge der Resolventen von C1 und C2 an

   Seien *C*, *C*1, *C*2 Klauseln.
   1. *C* ist eine Resolvente von *C*1 , *C*2 , wenn es ein Literal *L* gibt mit *L*∈*C*1 und –*L*∈*C*2 und*C*= (*C*1\{*L*})∪(*C*2\{ –*L*})
   2. Wir sagen, dass *C*1 und *C*2 resolviert werden und schreiben *Res*(*C*1, *C*2) für die Menge der Resolventen von *C*1 und *C*2.
   3. Wir werden das oft wie folgt graphisch  darstellen

iii) Sei C eine Resolvente von C1, C2. Beweisen Sie, dass {C1,C2} I= C,

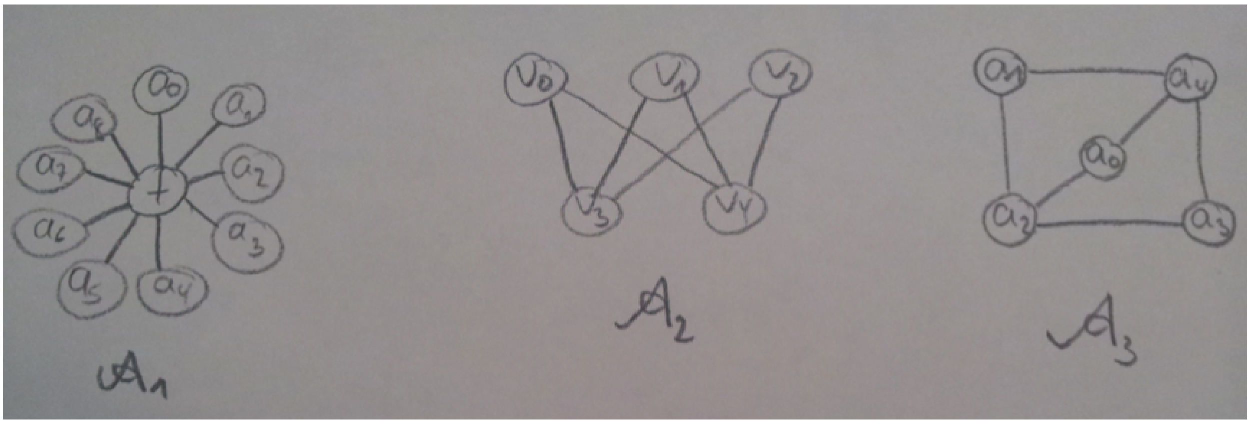
1. Wir zeigen zunächst, dass {*C*1, *C*2} |= *C*.
2. Wir müssen also zeigen, dass jede Belegung β mit β |= {*C*1 , *C*2 } auch *C* erfüllt.
3. Sei also β so, dass β |= {*C*1, *C*2}. Sei *L* das resolvierte Literal, d.h. *C* := (*C*1 \ {*L*}) ∪ (*C*2 \ {$\overline{L}$}).
    1. Angenommen, $[L]^{\beta} = 1$. Da β |= {*C*2} folgt, dass es ein *L'* ∈ *C*2 \ {–*L*} gibt mit $[L']^{\beta} = 1$. Also β |= {*C*}, da nach Definition der Resolvente *L'* ∈ *C*.
    2. Sei nun $[L]^{\beta} = 0$. Da β |= {*C*1}, gibt es ein Literal *L'* ∈ *C*1 \{*L*} mit $[L']^{\beta} = 1$. Also β |= {*C*}, da nach Definition der Resolvente *L'* ∈ *C*.
    3. Insgesamt gilt also β |= *C*.

iv) Zeigen Sie mit Hilfe der Resolution , dass folgende Formel unerfüllbar ist. {A,B,D},{C, –D}, {–C, –D}, {–A, D}, {A,C}, {–B, –C} // dabei soll „–“ die Negation sein.

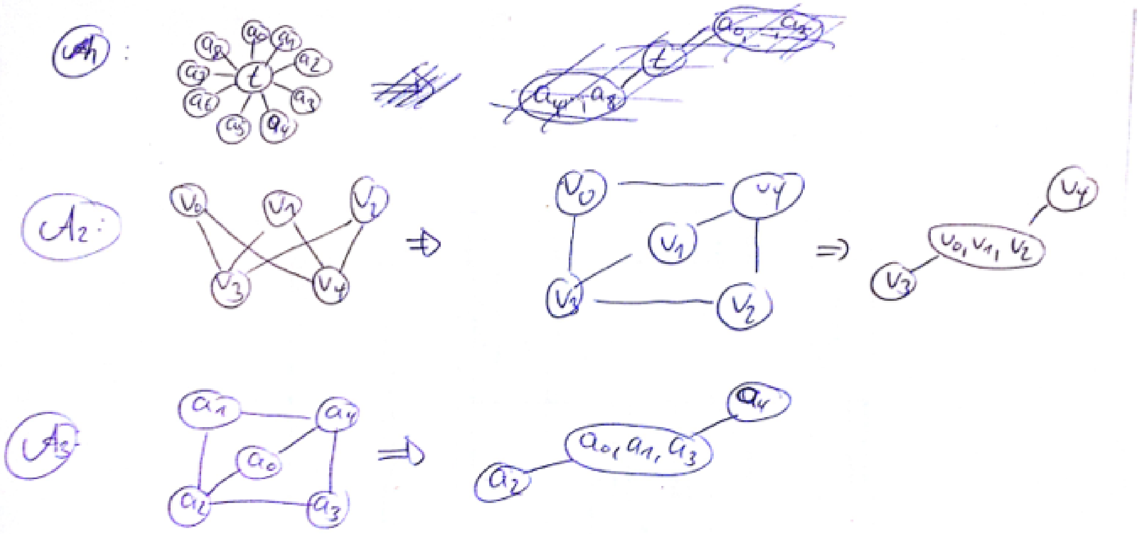


Aufgabe 8 (9+6 = 15 Punkte)

Sei ∂ = {E} die Signatur der Graphen. Betrachten Sie die folgenden drei Graphen (als ∂-Strukturen)



i) Geben Sie für alle i,j ∈ {1,2,3} mit i ≠ j an, ob es einen Homomorphismus oder einen Isomorphismus von Ai nach Aj gibt oder nicht. Begründen Sie Ihre Antwort. Falls es einen Homomorphismus bzw. Isomorphismus gibt, genügt zum Beispiel eine Wertetabelle oder eine Beschreibung der Abbildung als Begründung. Falls es keinen Homomorphismus bzw Isomorphismus gibt begründen Sie diese.



$\mathcal{A}_3 \cong \mathcal{A}_2$, das sieht man an dem Graphen.
↳ Es gibt eine Hom von $A_2 \to A_3$ und ein Hom von $A_3 \to A_2$

A_2, A_1: Es gibt nur ein Hom von A_2 nach A_1 ⇒ somit nur ~~Iso~~ Hom. kein iso

A_3, A_1 —— " —— Weil A_2 und A_3 nur Substrukturen/Subgraphen von A_1 sind.

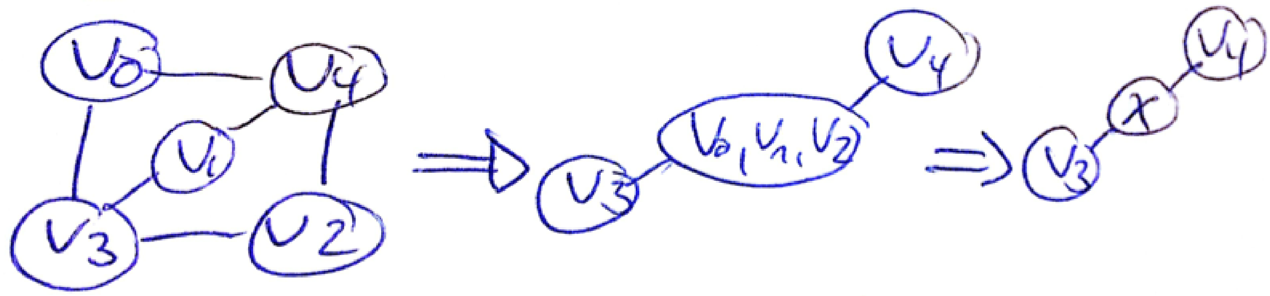
ii) Betrachten Sie die folgenden beiden Formeln:

1) $\varphi_1 \triangleq \exists x \forall y\, E(x,y)$

2) $\varphi_2 \triangleq \exists x \exists y \exists z (\neg E(x,y) \wedge \neg E(y,z) \wedge \neg E(x,z))$

Geben Sie für jede der Formeln an, in welchen der Strukturen Ai das gelten.
Sie müssen Ihre Antworten in diesem Aufgabenteil nicht begründen.

$\mathcal{A}_2$:



Das gleiche mit $\mathcal{A}_3$.
somit gilt: $\varphi_1 = \exists x \forall y\, E(x,y)$
für $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_3$

Bloss bei phi1 bin ich mir nicht ganz sicher ob es für alle gilt.
Wenn man die Graphen nicht zusammenfasst, dann gilt es nur für A1.
Die Vereinfachten Graphen von A2 und A3 sind Substrukturen von A1.

Phi2 gilt bei A1, A2 und A3

Aufgabe 9 (5+5=10Punkte)

i) Sei ∂ eine Signatur und A eine ∂-Struktur und k ∈ IN.

$$(\varphi \wedge \psi)(A) = \varphi(A) \cap \psi(A)$$

Seien Phi(x), Psi(x) ∈ FO[∂] Formeln mit einer freien Variablen. Zeigen Sie, dass es gilt.

ii) Zu jeden Graph G = (V,E) definieren wir den Komplementgraphen –G als den Graphen mit Knotenmenge V und Kantenmenge (V x V) \ E. Sei ∂ = {E} die Signatur der Graphen . Geben Sie eine Formel Phi ∈ FO[∂] an, so dass für jeden Graphen G (als ∂-Struktur aufgefasst) gilt Phi(G) ist die Kantenrelation von –G (Komplement von G) . Sie müssen Ihre Antwort in diesem Aufgabenteil nicht begründen.

1. (Lösung von Nabil)
2. $\varphi = \wedge (u, v) \in (VxV) \neg E(u, v)$