B. Mahr, S. Bab, T. Karbe, T. Wieczorek WS 07/08

2. Klausur TheGI 3

Aussagenlogik: Resolutionsverfahren
Prädikatenlogik
14. Februar 2008

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte:								

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 80 Punkte zu erreichen. Die Klausur gilt mit Erreichen von mindestens 40 Punkten als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte lasst Euer Exemplar der Klausur geklammert, schreibt aber bitte dennoch auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, iPODs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwändig erscheint.

Bei allen Aufgaben wird die Notation aus Buch und Vorlesung gebraucht!

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Es seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Ist S eine Klauselrepräsentation von $\varphi \wedge \psi$ und ist aus S die leere Klausel beweisbar, so gilt $\varphi \Vdash \psi$.		
Aus einer Klauselrepräsentation von $\varphi \wedge \neg\varphi$ ist die leere Klausel beweisbar.		
Aus einer Klauselrepräsentation von $\varphi \vee \neg\varphi$ ist die leere Klausel beweisbar.		
Ist S eine Klauselrepräsentation zu φ, aus der die leere Klausel beweisbar ist, so ist $\neg\varphi$ allgemeingültig.		

Aufgabe 2 *(12 Punkte)*
Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q, r \in P$. Überprüfe bitte mit Hilfe des Resolutionsverfahrens die nachstehende Folgerungen:

1. $\{\neg r \vee p, \neg r \vee \neg q, q \vee r, \neg p \vee q\} \Vdash \neg r \wedge q$.
2. $\{(p \to q) \vee r,\ q \vee r,\ (p \wedge q) \to r\} \Vdash \neg r \wedge \neg q \wedge \neg p$.

Für alle weiteren Aufgabe sei die folgende prädikatenlogische Signatur vorgegeben:

$$\Sigma = (\{s\}, \{c\}, \{P, Q\})$$

wobei

$$c :\to s, \qquad P : \langle s \rangle \qquad Q : \langle s \rangle.$$

Es sei außerdem $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ eine Variablenmenge zur Sorte s.

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Wenn $\varphi \Vdash \psi$, so ist $\varphi \to \psi$ stets tautologisch.		
Wenn $\varphi \to \psi$ tautologisch, so gilt stets $\varphi \Vdash \psi$.		
Wenn $\varphi \Vdash \psi$ und $\mathrm{Free}(\varphi) = \{x\}$, so ist $(\forall x.\varphi) \to \psi$ tautologisch.		
Ist φ ein Satz, so gilt $\forall x.\varphi \equiv \exists x.\varphi$.		
Wenn $\varphi \Vdash \psi$, so gilt stets $\neg\psi \Vdash \neg\varphi$.		
Ist ψ kontradiktorisch, so gilt für alle $A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma$ und alle $\beta : X \to A$, dass $(A, \beta) \not\models \varphi$.		

Aufgabe 4 *(8 Punkte)*

Überprüfe bitte, ob die folgenden Formeln allgemeingültig oder kontradiktorisch sind. Beweise Deine jeweilige Antwort.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= Q(c) \to \exists x.Q(x). \\ \varphi_2 &= Q(c) \land \neg\exists x.Q(x). \end{aligned}$$

Aufgabe 5 *(3+3+4=10 Punkte)*

Sei $\varphi \in \mathrm{Form}_\Sigma(X)$.

(a) Zeige bitte, dass
$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cap \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi) = \emptyset.$$

(b) Beweise nun, dass außerdem
$$\mathrm{Strukt}_\Sigma = \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi), \qquad (*)$$
falls φ ein **Satz** ist.

(c) Gib ein Beispiel für eine Formel φ an, für die $(*)$ aus (b) nicht gilt und weise dies nach, indem Du eine Σ-Struktur A angibst mit
$$A \notin \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) \cup \mathrm{Mod}_\Sigma(\neg\varphi).$$

Aufgabe 6 *(24 Punkte)*
Betrachte die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \forall x.(P(x) \to Q(x)) \\
\psi_2 &= \forall x.\forall y.(P(x) \to Q(y)) \\
\psi_3 &= \forall x.(P(x) \to \neg Q(x)) \\
\psi_4 &= \forall x.\forall y.(P(x) \to \neg Q(y))
\end{aligned}$$

Wie sehen die Modellklassen dieser Formeln aus? Beschreibe sie, ohne Formeln zu verwenden. Gib bitte zusätzlich für jede Formel ein Modell an, also für jedes $i = 1, \ldots, 4$ ein $A_i \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\psi_i)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi_1) &= \{A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma : A \models \forall x.(P(x) \to Q(x))\} \\
&=
\end{aligned}$$

A_1 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi_2) &= \{A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma : A \models \forall x.\forall y.(P(x) \to Q(y))\} \\
&=
\end{aligned}$$

A_2 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi_3) &= \{A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma : A \models \forall x.(P(x) \to \neg Q(x))\} \\
&=
\end{aligned}$$

A_3 :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi_4) &= \{A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma : A \models \forall x.\forall y.(P(x) \to \neg Q(y))\} \\
&=
\end{aligned}$$

A_4 :

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*

Formuliere bitte eine Formel χ, sodass genau die Strukturen A Modell von χ sind, in denen P_A und Q_A beide nicht leer und das Komplement voneinander bzgl. A_s sind, also so, dass

$$\mathrm{Mod}_\Sigma(\chi) = \{A \in \mathrm{Strukt}_\Sigma : P_A \neq \emptyset \text{ und } Q_A \neq \emptyset \text{ und } P_A \cap Q_A = \emptyset \text{ und } P_A \cup Q_A = A_s\}.$$

Aufgabe 8 *(12 Punkte)*

Überprüfe bitte, ob für die in der Tabelle angegebenen Σ-Formeln jeweils $\varphi \Vdash \psi$ gilt. Wenn die Folgerung gilt, so trage in die Tabelle **ja** ein. Gilt die Folgerung nicht, so trage **nein** ein. Wir haben uns erlaubt, die Einträge der Diagonale schon vorzunehmen. Für jeden richtigen Eintrag gibt es einen Punkt, für jeden falschen wird ein Punkt abgezogen. Fehlende Einträge werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es auf diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

$\varphi \Vdash \psi$		ψ			
		$\forall x.P(x)$	$\exists x.P(x)$	$P(c)$	$\exists x.P(x) \to P(c)$
φ	$\forall x.P(x)$	ja			
	$\exists x.P(x)$		ja		
	$P(c)$			ja	
	$\exists x.P(x) \to P(c)$				ja