B. Mahr, S. Bab, T. Wieczorek

1. Klausur TheGI 3

Aussagenlogik

15. Dezember 2007

Name, Vorname: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8
Punkte:								

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 50 Punkte zu erreichen. Die Klausur gilt mit Erreichen von mindestens 25 Punkten als bestanden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte laßt Euer Exemplar der Klausur geklammert, schreibt aber bitte dennoch auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, iPODs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwändig erscheint.

Bei allen Aufgaben wird die Notation aus Buch und Vorlesung gebraucht! Insbesondere sei im Folgenden P eine Menge von Aussagensymbolen.

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Es seien $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

Behauptung	wahr?	falsch?
Wenn φ eine Tautologie ist, so gilt $\emptyset \vdash_R \varphi$ für alle vollständigen Hilbertkalküle $(R, \vdash_R)$.		
Wenn $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \not\Vdash \varphi$, so ist $(\varphi_1, \wedge \ldots \varphi_n) \to \varphi$ nicht allgemeingültig.		
Ist φ eine Formel in DNF, so ist φ keinesfalls in KNF.		
Der Schnitt zweier Junktorbasen ist eine Junktorbasis.		
Wenn $\varphi \Vdash \psi$, so gilt stets $\neg\varphi \Vdash \neg\psi$.		
Sind φ und ψ beide erfüllbar, so ist auch stets $\varphi \wedge \psi$ erfüllbar.		
Für jedes φ existiert ein ψ in KNF mit $\varphi \equiv \psi$.		
Es gibt vollständige Hilbertkalküle ohne Axiome (also ohne Regeln, die eine leere Prämisse haben).		

Aufgabe 2 *(? Punkte)*

Eine Formel $\varphi \in \text{Form}(P)$ heißt determiniert, falls φ entweder tautologisch oder kontradiktorisch ist. Betrachte die folgenden Formeln. Welche davon sind determiniert? Beweise jeweiligs Deine Antwort. Verwende dabei bitte keine (!) Wahrheitstafeln, das ist viel zu aufwändig.

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= (p \leftrightarrow q) \vee \neg r \\
\varphi_2 &= \bot \to ((p \leftrightarrow q) \vee \neg r) \\
\varphi_3 &= \top \to ((p \leftrightarrow q) \vee \neg r) \\
\varphi_4 &= ((\top \vee \bot) \to (\neg\top \wedge \top \leftrightarrow \bot)) \vee ((\bot \to \top) \leftrightarrow \bot \wedge \bot) \vee \neg(\neg\top \leftrightarrow (\bot \wedge \top \to \neg(\top \wedge \bot)))
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*

Seien $p, q \in P$. Betrachte die Formel

$$\varphi = \top \to (\neg(p \to \bot) \to (\top \to q)).$$

Gib sowohl eine disjunktive Normalform (DNF) als auch eine konjunktive Normalform (KNF) für φ an und weise jeweils nach, dass die Normalform wirklich logisch äquivalent zu φ ist. Als Nachweis reichen hierbei entsprechende Äquivalenzumformungen oder auch eine Wahrheitstafel mit entsprechender Zeilenmarkierung.

Aufgabe 4 *(10 Punkte)*

Seien $p, q \in P$. Gib bitte zu den folgenden Formeln je eine logisch äquivalente Formel in DNF und eine in KNF an!

Formel	DNF	KNF
$\neg\neg\neg p$		
$\neg p \to p$		
$p \leftrightarrow q$		
$p \to \neg q$		
$\bot \to q$		

Aufgabe 5 *(3+3 Punkte)*

Seien $\varphi, \psi, \chi \in \mathrm{Form}(P)$. Beweise oder widerlege die folgenden Behauptungen (bei Widerlegung reicht die Angabe eines Gegenbeispiels):

(a) Wenn $\varphi \Vdash \psi \vee \chi$, dann $\varphi \Vdash \psi$ oder $\varphi \Vdash \chi$.

(b) Wenn $\psi \vee \chi \Vdash \varphi$, dann $\psi \Vdash \varphi$ und $\chi \Vdash \varphi$.

Aufgabe 6 *(34 Punkte)*

Seien $p, q \in P$. Überprüfe bitte, ob für die in der Tabelle angegebenen Formeln jeweils $\varphi \Vdash \psi$ gilt. Wenn die Folgerung gilt, so trage in die Tabelle **ja** ein. Gilt die Folgerung nicht,so trage **nein** ein. Für jeden richtigen Eintrag gibt es einen halben Punkt, für jeden falschen wird ein halber Punkt abgezogen. Fehlende Einträge werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es auf diese Teilaufgabe aber mindestens null Punkte.

$\varphi \Vdash \psi$		ψ							
		$\bot$	$\top$	p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
φ	$\bot$								
	$\top$								
	p								
	q								
	$p \vee q$								
	$p \wedge q$								
	$p \to q$								
	$p \leftrightarrow q$								

Aufgabe 7 *(5+1 Punkte)*

Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Form}(P)$.

1. Beweise mit Hilfe des (korrekten und vollständigen) Hilbert Kalküls HK,

$$\dfrac{}{p \to (q \to p)}\ (\varrho_1) \qquad \dfrac{}{(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))}\ (\varrho_2)$$

$$\dfrac{}{(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)}\ (\varrho_3) \qquad \dfrac{p, p \to q}{q}\ (\varrho_4)$$

dass

$$\{\varphi, \neg\varphi\} \vdash_{HK} \psi$$

indem Du in dem untenstehenden Beweisbaum alle durch … gekennzeichneten Leerstellen in geeigneter Weise durch die Symbole φ, ψ und deren Negationen ersetzt:

$$\dfrac{\dfrac{}{\varphi}\,Vor \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\varphi}\,Vor \quad \dfrac{}{\ldots \to (\ldots \to \ldots)}\,\varrho_1}{\ldots \to \ldots}\,\varrho_4 \quad \dfrac{}{(\ldots \to \neg\ldots) \to (\ldots \to \ldots)}\,\varrho_3}{\ldots \to \ldots}\,\varrho_4}{\ldots}\,\varrho_4$$

2. Warum gilt $\{\varphi, \neg\varphi\} \Vdash \psi$?